



Stabilité linéaire et non linéaire des schémas de Boltzmann sur réseau simulant des écoulements visqueux compressibles

Louis-Marie Cleon

► To cite this version:

Louis-Marie Cleon. Stabilité linéaire et non linéaire des schémas de Boltzmann sur réseau simulant des écoulements visqueux compressibles. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2014. Français. NNT : 2014PA066183 . tel-01147133

HAL Id: tel-01147133

<https://theses.hal.science/tel-01147133>

Submitted on 29 Apr 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Pierre et Marie Curie

THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Mécanique des fluides

présentée par

Louis-marie Cléon

**Stabilité linéaire et non linéaire des schémas de
Boltzmann sur réseau simulant des
écoulements
visqueux compressibles**

dirigée par Pierre SAGAUT

Soutenue le juin 2014 devant le jury composé de :

M. R. MARCHIANO	Université Pierre et Marie Curie	examineur
M. E. VERGNAULT	INSA de Lyon	examineur
M. A. HAMDOUNI	Université La Rochelle	rapporteur
M. P. SAGAUT	Université Pierre et Marie Curie	directeur de thèse
M. J.C. ROBINET	ENSAM Paris	rapporteur
M ^{lle} C. TALOTTE	Direction de la Recherche SNCF	examineur
M. A. TABBAL	Alstom transport	examineur

JE DÉDIE CETTE THÈSE À MES PARENTS ET BEAUX PARENTS

”DANS LA MESURE OÙ ELLES SE RAPPORTENT AU MONDE EXTÉRIEUR, LES LOIS DES
MATHÉMATIQUES NE SONT PAS SÎRES ; ET DANS LA MESURE OÙ ELLES SONT SÎRES, ELLES
NE SE RAPPORTENT PAS À LA RÉALITÉ ”
ALBERT EINSTEIN

” JE NE PUIS ; -MALGRÉ MOI L’INFINI ME TOURMENTE,
JE N’Y SAURAI SONGER SANS CRAINTE ET SANS ESPOIR ;
ET, QUOIQU’ON EN AIT DIT, MA RAISON S’ÉPOUVANTE
DE NE PAS LE COMPRENDRE, ET POURTANT DE LE VOIR.”
ALFRED DE MUSSET

Résumé

L'étude de stabilité des systèmes différentiels issus des équations de Navier-Stokes consiste à analyser la réponse du système linéarisé à une perturbation en onde plane. Elle ne peut pas rendre compte de tous les mécanismes possibles d'instabilité non linéaire. De telles analyses de stabilité non linéaire ont été abordées pour des discrétisations en différences finies de l'équation scalaire non visqueuse de Burgers. Elles sont basées sur l'analyse en ondes résonantes, en considérant un ensemble d'ondes qui forment un groupe fermé pour l'équation discrétisée. Une conclusion importante de ces travaux est que quelques mécanismes non linéaires instables existent qui échappent à l'analyse linéaire, comme le mécanisme de focalisation étudié et expliqué à l'aide des modes de side band, introduits pour amorcer les instabilités.

Cette approche d'ondes résonantes est étendue à l'analyse non linéaire de stabilité pour les méthodes LBM (Lattice Boltzmann Method). Nous présentons pour la première fois une équation vectorielle à la place de l'équation scalaire de Burgers, car la méthode LBM considère une fonction de distribution par vitesses discrètes. L'application du principe des ondes résonantes aux équations de Boltzmann sur réseau pour un écoulement monodimensionnel, compressible et isotherme dans un schéma D1Q3 donne des cartes d'instabilité, dans le cas de 1 ou plusieurs modes résonants, très dépendantes des conditions initiales. Le phénomène de focalisation n'a pas été obtenu dans la formulation LBM. Des croissances transitoires dues à la non-normalité des opérateurs peuvent exister. Elles sont calculées par une méthode d'optimisation Lagrangienne utilisant les équations adjointes de LBM. L'application du principe des ondes résonantes est étendue à un modèle 2D. On montre que les instabilités deviennent prépondérantes.

Abstract

The stability study of differential systems derived from the Navier- Stokes equations consists in analysing the response of the planar linearized system from a disturbance on a flat wave. It cannot account for all possible mechanisms of nonlinear instability. Such non-linear stability analyses were discussed for finite difference of the scalar non-viscous Burger equation. They are based on the analysis in resonant waves, considering a set of waves that form a closed group for the discretized equation. An important conclusion of this work is that some unstable nonlinear mechanisms exist that are beyond the linear analysis, as the focusing mechanism studied and explained using the methods of side band, introduced to initiate instabilities. This approach of resonant waves is extended to non-linear stability analysis for LBM (Lattice Boltzmann Method) methods. We report for the first time a vector equation instead of the scalar Burgers equation, because the LBM method considers a distribution function by discrete speeds. The principle of resonant waves to lattice Boltzmann equations for one-dimensional flow in a compressible and isothermal D1Q3 scheme gives instability maps, in the case of one or more resonant modes , highly dependent upon the initial conditions. The phenomenon of focus has not been obtained in the LBM formulation. Transient growth due to non-normality of operators may exist. They are calculated by a Lagrangian optimization method combined with LBM equations. The principle of resonant waves is extended to a 2D model. We show that the instabilities become dominant.

Je remercie tout d'abord mon Directeur de thèse Pierre Sagaut pour avoir accueilli un vieux thésard à cheveux blancs sans préalable, pour m'avoir aidé à choisir un sujet, pour m'avoir orienté, réorienté quand je m'égarais. Je lui souhaite beaucoup de bonheur dans ses nouvelles fonctions au soleil du Sud.

Je remercie Jean Christophe Robinet et Aziz Hamdouni d'avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse.

Je remercie Régis Marchiano, Etienne Vergnault, Corinne Talotte et Ali Tabbal d'avoir accepté d'être examinateurs dans ce jury.

Je remercie Etienne Vergnault de m'avoir "éducationné" sur le campus de Jussieu, à la méthode de Boltzmann, aux logiciels LaTeX et Matlab et d'avoir répondu à tous mes mails affolés.

Je remercie Denis Ricot [1] et Simon Marié [2] dont les thèses m'ont beaucoup aidé à comprendre la méthode de Boltzmann sur réseau.

Je remercie la SNCF qui, dans mon dernier poste à la direction de la Recherche, à l'occasion des essais d'augmentation de vitesse des TGV et de ses conséquences sur le bruit en environnement, m'a permis d'entrevoir la méthode de Boltzmann et de me fournir l'envie de la comprendre pendant ma retraite. Je me suis permis d'utiliser ici quelques figures de mes publications et exposés réalisés pendant ma période active de cheminot.

Je remercie vivement mon fils Gwenaël, roi du logiciel LaTeX, de m'avoir aidé à concrétiser quelques schémas et à revoir la forme des souvent (trop) longues équations.

Je remercie mes autres enfants, ma fille Morgane, d'avoir pris souvent des nouvelles de la thèse de son père, entre une histoire pour Mélodie et un biberon pour Elisa, mon fils Corentin, d'avoir supporté et accepté un père pas assez souvent disponible, mon fils Erwan, d'avoir souvent appelé son père pour s'assurer avec humour que la thèse avançait bien.

Je remercie la société Alstom de m'avoir confié quelques figures représentatives de calculs hydrodynamiques sur les TGV actuels ou à venir.

Je remercie ma kiné Constance, d'avoir soigné le physique, pour que les neurones du mental travaillent bien pendant la rédaction de cette thèse.

Je remercie Charlotte, ma filleule d'avoir été la première à relire ma thèse.

Je remercie les auteurs du logiciel LaTeX sans qui je n'aurais jamais pu écrire mes équations interminables et les auteurs de ce livre pédagogique indispensable pour l'utiliser : LaTeX pour l' impatient [3].

Je remercie mon index droit d'avoir pendant 3 ans tapé sur les claviers d'ordinateurs tout seul comme un grand, sans avoir envie d'entraîner d'autres doigts à faire de même.

Je remercie tous les amis qui, sans raison m'ont "admiré", de faire une thèse physico - mathématique - " Pour moi les maths c'est loin " - .

Je remercie mes enfants et mes petits enfants d'avoir supporté qu'un père et grand père en retraite ne soit pas forcément plus disponible qu'avant.

Je remercie Véronique mon épouse, pour m'avoir poussé à faire cette thèse, avoir enduré un séjour rempli de publications, une table à manger couverte de brouillons, un ordinateur souvent indisponible, pour m'avoir soutenu dans mes phases pessimistes lorsque mes neurones disjunctaient sur un problème, que l'ordinateur plantait et surtout d'avoir relu toute la thèse.

Je remercie mon docteur, qui en émettant l'idée d'une thèse, a réussi à me sortir de mon apathie post service actif.

Je remercie tout le personnel administratif du laboratoire, en particulier Marie Aubin, de m'avoir aidé pour m'y retrouver dans le parcours administratif d'un thésard.

Je remercie la chanteuse ZAZ dont les disques écoutés en boucle durant la frappe et les corrections de ce texte m'ont évité une folie passagère.

Table des matières

Introduction	1
1 Quelques définitions et résultats généraux	11
1.1 Equations de Navier-Stokes et de Burgers	11
1.1.1 Equations de Navier-Stokes 3D et 1D compressibles	11
1.1.2 Equations de Navier-Stokes en 3D	12
1.1.3 Equation de Navier-Stokes en 1D	13
1.1.4 Equations de Navier-Stokes incompressibles, isothermes	13
1.1.5 Equations de Navier-Stokes a-dimensionnées	14
1.1.6 Equations de Burger 1D, visqueuse et non visqueuse	15
1.2 Stabilité	16
1.2.1 Quelques définitions de stabilité	16
1.2.2 Stabilité hydrodynamique sous écoulement uniforme	17
1.2.3 Erreur d'aliasing	22
2 Analyse linéaire et non linéaire de l'équation de Burgers	25
2.1 Description du phénomène	25
2.2 Analyse non linéaire en ondes résonantes	29
2.2.1 Analyse non linéaire : ondes résonantes sur 1 mode	29
2.2.2 Analyse non linéaire : ondes résonantes sur 2 modes	29
2.2.3 Remarques pour l' application des modes résonants à l'équation de Boltzmann	31
2.3 Mécanisme de focalisation et d'instabilité	33
2.4 Quelques résultats sur la focalisation	35
2.4.1 Exemples de focalisation sur les solutions à 1 mode	35
2.4.2 Exemples de focalisation sur les solutions à 2 modes	37
2.5 Analyse de la focalisation	44
2.5.1 Méthode simplifiée	45
2.5.2 Analyse de l'équation continue vis à vis des modes de sideband par la méthode des échelles multiples	46
2.5.3 Analyse des équations discrétisées en temps par le schéma leapfrog	51
2.6 Stabilité d'un schéma numérique pour l'équation dissipative linéaire de Burgers	55
3 Méthode de Boltzmann sur réseau	59
3.1 Equation de Boltzmann	59
3.2 Lattice Boltzmann Equation	61
3.3 Lattice Boltzmann Equation : écoulement 1D visqueux, isotherme	62
4 Stabilité linéaire et non linéaire des équations de Boltzmann	71
4.1 Discrétisation en espace et en temps	71
4.2 Stabilité linéaire des équations de Boltzmann	73
4.3 Analyse non linéaire en ondes résonantes	77
4.3.1 Initialisation	77

4.3.2	Analyse non linéaire sur le mode résonant $2\pi/3$	77
4.3.3	Ondes résonantes sur 2 modes	88
4.4	Analyse non linéaire en ondes résonantes. A-t on focalisation ?	96
4.4.1	Présentation du problème, exemple d'équations obtenues	96
4.4.2	Conclusion partielle	101
5	Stabilité linéaire et non linéaire non modale	103
5.1	Stabilité linéaire non modale	103
5.1.1	Equation modèle	104
5.1.2	Stabilité non modale de l'opérateur linéarisé des équations de Boltzmann	108
5.2	Optimisation non linéaire des équations de Boltzmann en temps courts	119
5.2.1	Principe de l'optimisation non linéaire des croissances dans l'équation de Burgers continue	119
5.2.2	Optimisation non linéaire des équations de Boltzmann en temps courts	121
6	Boltzmann 2D	135
6.1	Définition du modèle D2Q9	135
6.2	Etude de l'équation de Boltzmann linéarisée	139
6.3	Ondes résonantes sur 2 modes	140
6.3.1	Développement des équations de collision	140
6.3.2	Equations de transport	146
6.3.3	Conditions aux frontières	146
6.3.4	Conditions initiales	146
	Conclusion	151
	A Différences finies avec schéma leapfrog	155
	B Méthode des échelles multiples	159
	C Equation de Boltzmann	163
C.1	Gaz dilué, ordres de grandeur des paramètres	163
C.2	Fonction de répartition $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$	164
C.3	Equation de Boltzmann sans collision	164
C.4	Collision de deux particules	165
C.5	Application aux densités de probabilité $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$	168
C.5.1	Termes de collision sortant	169
C.5.2	Termes de collision entrant	169
	D Stabilité et points fixes	171
	Bibliographie	179
	Table des figures	183
	Liste des tableaux	187

Notations

- Les paramètres en lettres grasses sont des vecteurs.
- Nous utiliserons les anglicismes suivants : leapfrog pour saut de mouton, sideband pour bande latérales, aliasing pour repliement de spectre.
- Les symboles suivants sont utilisés : \bar{a} pour a stationnaire, a^* pour le conjugué de a , \tilde{a} pour l'adjoint de a , \mathcal{I}, \mathcal{R} pour la partie imaginaire et la partie réelle d'un nombre complexe.
- L'abréviation : c.c. pour complexe conjugué.

Introduction

Problématique industrielle ferroviaire

Dans le secteur ferroviaire, les sujets, et souvent problèmes, liés aux écoulements d'air (plus savamment hydrodynamiques) couvrent une très large variété de phénomènes physiques :

La résistance à l'avancement d'un train est de la forme $A + BV + C_x V^2$ avec V vitesse du train. Elle dimensionne la motorisation des trains, et plus particulièrement, avec le terme en $C_x V^2$, celle des trains à grande vitesse. La réduction de la traînée aérodynamique C_x concerne à la fois l'optimisation des formes avant, (et donc arrière pour un train réversible comme le TGV), des écoulements autour des bogies, sous caisses et entre véhicules. La figure (1) montre une coupe de la simulation de la couche limite d'un TGV au niveau de la liaison entre 2 remorques.

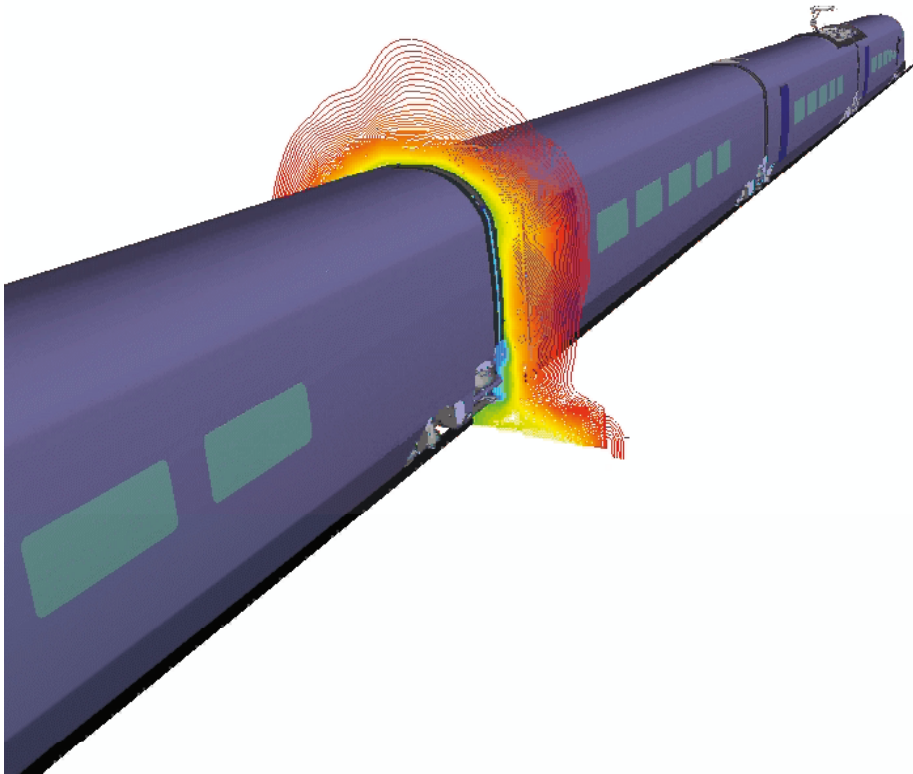


FIGURE 1 – Simulation par la méthode de Boltzmann sur réseau de la couche limite autour d'un TGV à 300 km/h au niveau inter remorques - source Alstom -

L'effet de souffle provoqué par le passage du train, le long des voies ou sur les quais de

gares de passage doit être réduit sans augmenter inconsiderablement la largeur des plateformes ferroviaires. De même que l'entr'axe des voies doit être ajusté pour éviter des dommages sur les véhicules (vitres, portes) lors du croisement de 2 trains.

Avec la réduction du bruit de roulement, suite à la suppression des semelles de frein - cause, lors des freinages, d'une rugosité sur la roue et donc d'un bruit de "contact" - et leur remplacement par des freins à disque, le bruit d'origine aérodynamique devient prédominant à grande vitesse en environnement comme le montre la figure (2). Ce bruit aéroacoustique se décline également dans la composante confort des voyageurs et du mécanicien avec les bruits de sillage sur les parois, ceux provoqués par les écoulements turbulents entre caisses. La figure (3) montre la simulation par la méthode de Boltzmann sur réseau de l'écoulement autour de la baie frontale de la motrice de tête pour réduire le bruit en cabine de conduite.

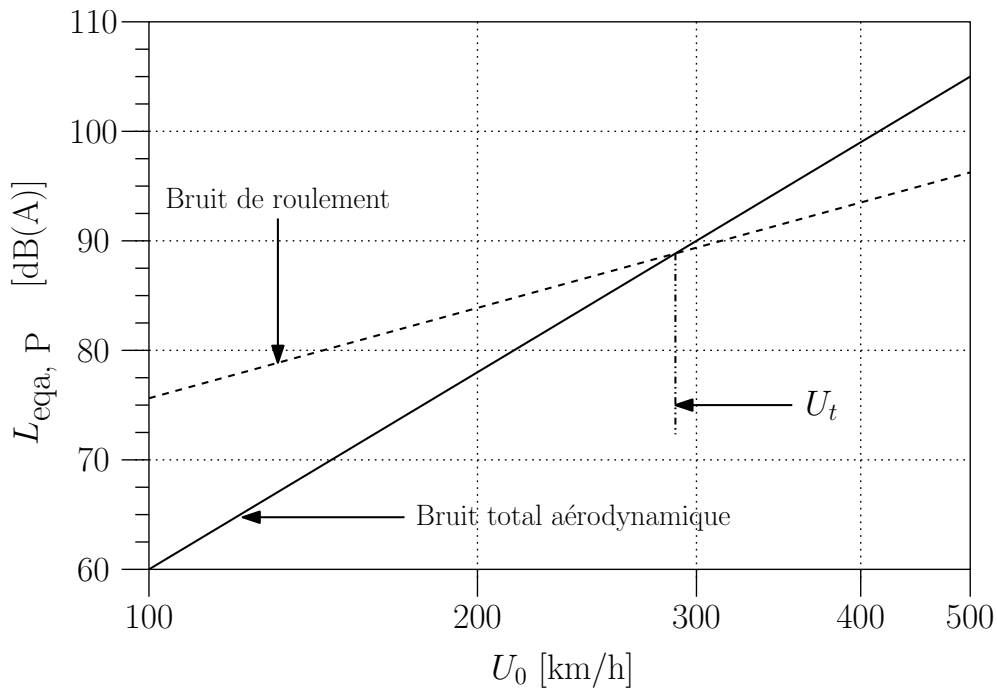


FIGURE 2 – Comparaison entre le bruit de roulement et le bruit aérodynamique en fonction de la vitesse.

(LeqA en dBA en fonction de la vitesse U_0 en km/h) - source SNCF -

Les efforts latéraux sur les faces des véhicules d'un TGV, dus à la composition vectorielle du "vent aérodynamique" autour du train et d'un "vent traversier météorologique" (comme le mistral ou la tramontane sur la ligne TGV méditerranée), dont l'amplitude des rafales atteint fréquemment des vitesses supérieures à 100 km/h, en particulier sur certaines configurations d'ouvrages (viaducs, ponts, remblais) peuvent être importants. Afin d'éviter tout risque de renversement du train, la SNCF a organisé la protection de la ligne par des murs anti-vent sur les sites les plus exposés, figure (4) et des stations anémométriques d'alerte mesurant la vitesse du vent, calculant le vent prévisionnel dans les 5 minutes qui suivent et le comparant à des courbes de risque pour éventuellement réduire la vitesse du train, figure (5).

Les différents ventilateurs de refroidissement des organes électriques, (comme le transformateur), peuvent provoquer des nuisances sonores sur les quais de gare naturellement "peu absorbants".

La protection de l'environnement et le passage des TGV en zones urbanisées ont accru la

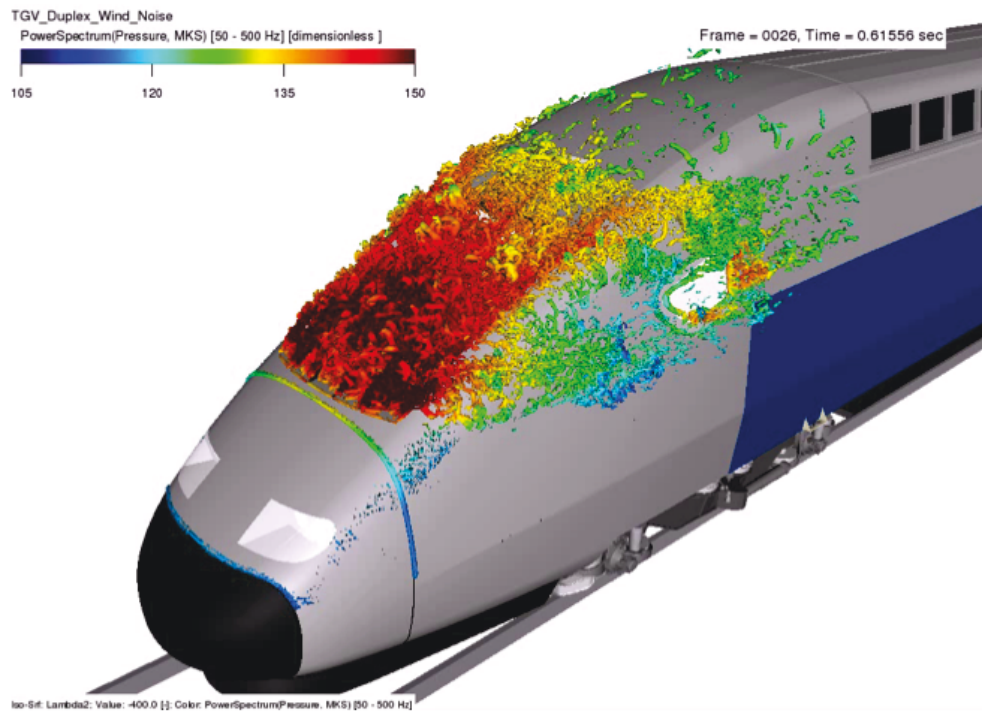


FIGURE 3 – Simulation par la méthode de Boltzmann sur réseau du bruit aéroacoustique autour de la cabine de conduite.

(Densité spectrale de puissance de la pression dans la bande [50-500hz]) - source Alstom -



FIGURE 4 – Protection vis à vis des vents traversiers sur le viaduc des Angles au franchissement du Rhône - source SNCF -

longueur des tunnels et donc, à leur franchissement, l'émergence d'ondes de compression et de détente dont l'amplitude est proportionnelle au rapport : section de train sur section du tunnel, procurant un inconfort tympanique voire des douleurs, figure (6) et figure (7). L'optimisation du couple train (forme avant et arrière des motrices, étanchéité du train aux ondes de pression), tunnel (section et forme d'entrée du tunnel) est nécessaire pour réduire cet inconfort sans augmenter abusivement et économiquement la section des tunnels.



FIGURE 5 – Station anémométrique sur la ligne TGV Méditerranée mesurant la vitesse et la direction du vent - source SNCF -



FIGURE 6 – Onde de compression à l'entrée de la tête du train dans un tunnel - source SNCF -



FIGURE 7 – Onde de détente à l'entrée de la queue du train dans un tunnel - source SNCF -

Le confort thermique dans les espaces voyageurs des trains à un ou deux niveaux doit être très étudié en amont de la fabrication : homogénéisation de la température dans les espaces voyageurs et réduction des vitesses d'air perçues par les clients.

La figure (8) montre pour un TGV Duplex, la simulation par la méthode de Boltzmann sur réseau des vitesses d'air en situation de chauffage par température normée de -20 degrés C.

Les records du monde successifs ont montré la difficulté de capter correctement l'électricité de la caténaire avec le pantographe pour le dernier record à 575 km/h, ou même en unité multiple pour les vitesses commerciales de 300-320 km/h, par fort vent latéral. Il faut assurer un compromis, pour un bon captage, entre l'effort de portance aérodynamique, fonction de la vitesse, l'effort mécanique du pantographe même asservi et l'effort sur le fil de caténaire suffisant pour capter correctement, la figure (9) montre une partie de la problématique aérodynamique avec la création d'une couche limite turbulente dans la zone et autour du pantographe.

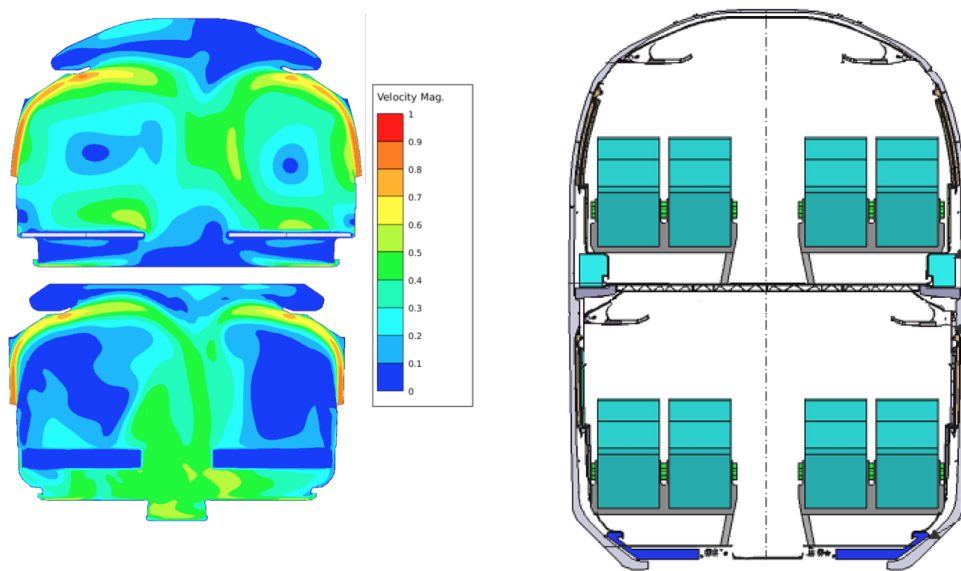


FIGURE 8 – Simulation par la méthode de Boltzmann sur réseau des vitesses d’air dans les 2 salles de 2^e classe du TGV Duplex (” le plus beau train du monde! ”) en situation de chauffage - source Alstom -

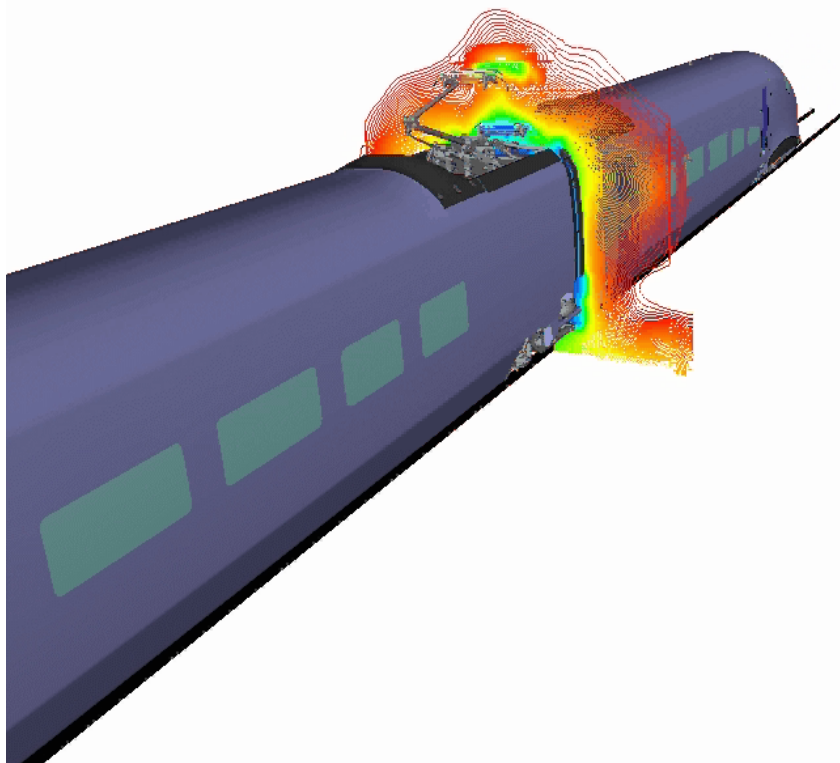


FIGURE 9 – Simulation par la méthode de Boltzmann sur réseau de la section de couche limite au niveau du pantographe - source Alstom -

Cette liste de situations hydrodynamiques, les plus connues car visibles par les clients, n’est pas exhaustive. On doit aussi organiser et assurer ”dans les 2 sens de marche ” le refroidisse-

ment :

- des organes sous caisse, comme les moteurs de traction, les réducteurs,...
- de l'appareillage électrique (transformateurs, selfs,...) par les prises d'air neuf extérieures,
- des boîtes d'essieu, en particulier quand les bogies possèdent des carénages aérodynamiques.

On peut ajouter également pour les automoteurs thermiques la nécessité d'évacuer correctement les fumées de combustion des moteurs diésels.

Pour clore cette liste, on signalera l'obligation de résoudre préalablement la problématique liée à l'envol de ballast, provoqué par les turbulences sous caisse, plus aigüe avec l'augmentation potentielle des vitesses commerciales des TGV au delà de 320 km/h.

Une approche unique n'est pas possible pour traiter tous ces problèmes ou fonctions, même si leur source reste toujours la même : les écoulements d'air autour du train (et dans le train pour la climatisation). Par ailleurs les paramètres de ces écoulements d'air peuvent être différents, considérés comme compressibles ou non, visqueux ou non, isothermes ou non, suivant les situations évoquées, et donc nécessitent des moyens d'essai ou (et) des outils de simulation différents. Dans tous les cas, l'objectif final est celui de modéliser, simuler, tester, optimiser le plus en amont de la fabrication et des essais de réception, le fonctionnement du train, pour bien répondre au cahier des charges du client.

Cet objectif doit être atteint dans une période où des efforts importants sont exigés pour réduire les délais et les coûts, tout en améliorant la fiabilité.

Dans ce contexte, en complément de l'expérience, des essais en ligne et en soufflerie, l'approche numérique prédictive s'est révélée absolument indispensable.

A l'heure actuelle, aucun code de simulation numérique ne permet de résoudre, sans simplification, les équations de Navier Stokes 3D, visqueuses, compressibles et thermiques (chapitre 1) ou celles d'Euler qui doivent décrire l'ensemble de tous ces phénomènes. Actuellement, théoriquement, on ne sait pas si des solutions uniques existent (en particulier avec la sensibilité de la turbulence aux conditions initiales : voir l' anecdote sur le battement d'aile d'un papillon en Amérique qui déclencherait une dépression sur nos côtes françaises !).

Les codes numériques existant, usent de différentes simplifications :

- méthodes DNS (Simulation Numérique Directe) limitées à des écoulements à bas Reynolds.
- méthodes LES (Large Eddy Simulation) dans lesquelles la simulation ne doit résoudre que les plus grandes échelles de turbulence.
- méthodes RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes) moyennées et complétées par des modèles de turbulence (k , ϵ par exemple).
- méthodes mixtant les méthodes précédentes.

La méthode de Boltzmann sur réseau

Pourtant, depuis une dizaine d'années, des logiciels nouveaux offrent une alternative aux codes basés uniquement sur la discrétisation des équations de Navier Stokes [4] ; ceux-ci utilisent la(es) méthode(s) de Boltzmann sur réseau (LBM en anglais : Lattice Boltzmann Methods). Les figures suivantes montrent un maillage d'espace (réseau) autour d'un TGV, figure (10) et quelques simulations d' écoulements sur la tête et le dessous de la caisse de la motrice TGV, figure (11) et figure (12) par la LBM.

Ces méthodes sont maintenant des outils très populaires dans le transport : aviation, automobile et ferroviaire, mais aussi dans la recherche médicale et la météorologie, pour des simulations en dynamique des fluides, avec de nombreux champs d'application, comme l'aérodynamique,

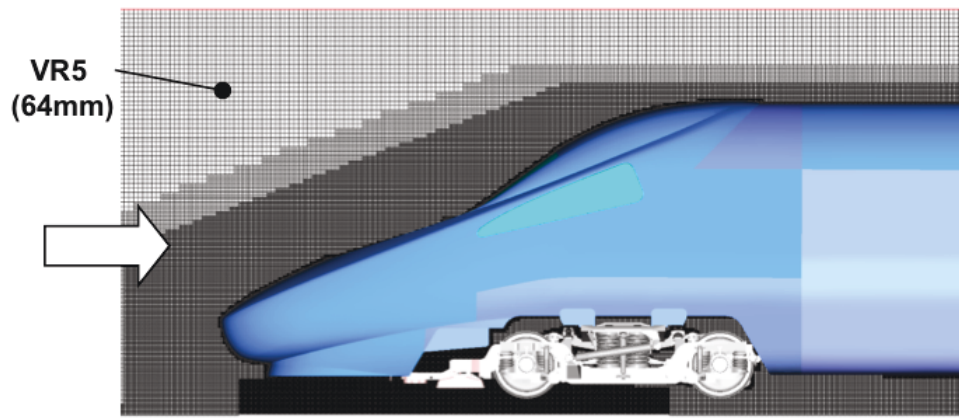


FIGURE 10 – Maillage (réseau) autour d'un TGV pour un calcul de Boltzmann sur réseau - source Alstom -

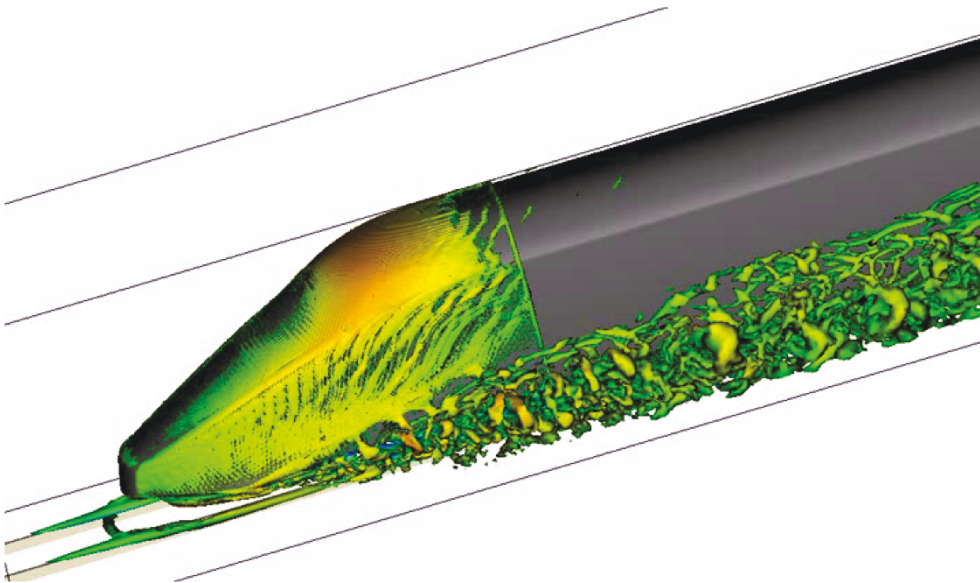


FIGURE 11 – Simulation par la LBM de l'écoulement en tête d'une motrice avant TGV - source Alstom -

l'aéroacoustique, les transferts de chaleur, la circulation du sang,...

Comme toutes les méthodes numériques, les propriétés de stabilité et de précision peuvent être analysées d'une façon théorique, exactement comme cela peut être fait pour celles basées sur la résolution plus ou moins directe des équations d'Euler et de Navier-Stokes. Mais, comme toute simulation qui exige des discrétisations en espace et en temps, elles peuvent induire des erreurs, en particulier en générant des instabilités numériques difficiles à détecter, à comprendre et à supprimer.

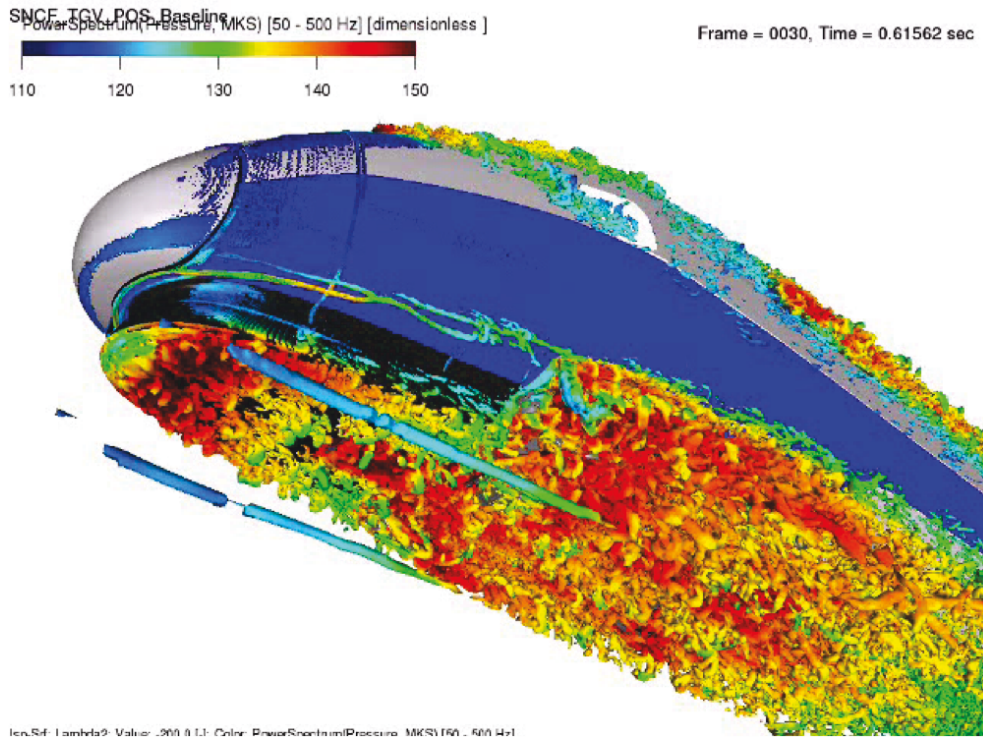


FIGURE 12 – Simulation de l'écoulement sous la motrice avant d'un TGV.
 (Calcul de la densité spectrale de puissance par la LBM de la pression dans la bande [50-500hz])
 - source Alstom -

Instabilités des schémas de Boltzmann sur réseau

Presque toutes les analyses de stabilité existantes des méthodes de Boltzmann sur réseau peuvent être interprétées comme une extension de la méthode de Von Neumann, qui consiste à analyser la réponse du système linéarisé à une perturbation en onde plane. L'analyse de stabilité de schémas LBM a été faite par de nombreux auteurs, à la fois pour les méthodes LBM-BGK (pour Bhatnagar - Gross - Krook qui ont proposé une approximation de l'opérateur de collision de l'équation de Boltzmann (Annexe C) [5]) et LBM-MRT (pour Temps de Relaxation Multiples [6]). L'analyse de stabilité linéarisée est un outil utile, mais il ne peut pas rendre compte de tous les mécanismes possibles d'instabilité non linéaire. De telles analyses de stabilité non linéaire ont été abordées dans quelques publications, pour des discrétisations en différences finies de l'équation scalaire non visqueuse de Burgers (chapitre 2) [7, 8, 9, 10, 11, 12]. Elles sont basées sur l'analyse en ondes résonantes, technique qui a été développée pour l'analyse des ondes non linéaires à haute énergie. Elles consistent à considérer un ensemble d'ondes qui forment un groupe fermé pour l'équation discrétisée. Une conclusion importante de ces travaux, est que quelques mécanismes non linéaires instables existent, qui échappent à l'analyse linéaire. Un exemple frappant est celui du mécanisme de focalisation qui est un phénomène non linéaire purement numérique, associé à certains schémas de discrétisation en temps. A notre connaissance, aucune analyse non linéaire de stabilité pour les méthodes LBM à travers une approche d'ondes résonantes n'a été faite jusqu'à maintenant.

L'objectif principal de cette thèse est d'étendre cette approche aux méthodes LBM.

Eu égard à sa relative simplicité analytique, elle sera restreinte à un problème 1D, comme celui réalisé par les auteurs précités pour l'équation de Burgers, mais par contre en visqueux et compressible. Il est important de noter que du point de vue théorique, la thèse présente pour la première fois, une équation vectorielle à la place d'une équation scalaire. La raison de ceci

est que l'on doit considérer, dans la méthode LBM, pour chaque vitesse discrète, une fonction de distribution, alors qu'une seule vitesse scalaire est prise en compte dans les travaux basés sur l'équation de Burgers.

Organisation de la thèse

La thèse est organisée comme suit :

Dans un premier chapitre, nous rappellerons les équations et les outils utiles pour la thèse : les équations de Navier Stokes et leur formulation minimale : l'équation de Burgers. Nous montrerons que les solutions d'un écoulement compressible, isotherme avec écoulement de base uniforme (en espace et en temps) sont toujours asymptotiquement stables et donc que les instabilités rencontrées seront numériques. Nous donnerons quelques résultats sur le schéma de discrétisation leapfrog de l'équation de Burgers et le parasitage numérique des solutions qui en résultent.

Dans un second chapitre, nous rappellerons le principe de l'analyse en ondes résonantes de l'équation de Burgers et tenterons de développer le mécanisme pressenti par les auteurs [7, 8, 9, 10, 11, 12] à partir des modes de "side band" introduits pour amorcer des instabilités.

Le troisième chapitre sera consacré à la méthode de Boltzmann[13]. Nous détaillerons son écriture monodimensionnelle en décrivant les différentes phases de la méthode rarement expliquées en 1D. Auparavant nous expliquerons le plus simplement possible l'équation originelle de Boltzmann (Annexe C) :

- d'une part car elle est à l'origine de ce " merveilleux " passage entre le transport et les chocs de particules microscopiques et celle des variables macroscopiques (vitesses, pression, température, densité), entre la réversibilité microscopique et l'irréversibilité macroscopique.
- d'autre part car elle participe à la démonstration du célèbre théorème de Boltzmann sur l'entropie [14, 15, 16].

Le quatrième chapitre montrera l'application du principe des ondes résonantes aux équations de Boltzmann sur réseau pour un écoulement monodimensionnel, compressible et isotherme dans un schéma D1Q3 (D1 comme 1 dimension, Q3 comme 3 vitesses). Nous réaliserons des cartes d'instabilité dans le cas de un ou plusieurs modes résonants. Nous montrerons que si le phénomène de focalisation n'existe pas dans la formulation LBM, des croissances transitoires pourraient exister.

Nous aborderons dans le cinquième chapitre quelques notions et outils récents comme la non-normalité, l'utilisation des équations adjointes de LBM pour réaliser et tenter d'expliquer ce phénomène transitoire.[17, 18, 19, 20]

Le dernier chapitre abordera l'application du principe des ondes résonantes à un modèle 2D.

Puis nous conclurons.

Quelques définitions et résultats généraux

Ce chapitre est consacré à la définition de différents outils nécessaires à ce travail.

Nous présenterons d'abord les équations de Navier Stokes qui décrivent les écoulements, dans leur formulation la plus générale en compressible, visqueux et 3D. Ces équations sont issues de la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Tous les travaux sur les mécanismes non linéaires instables ont été réalisés sur des discrétisations de l'équation modèle de Burgers, que nous rappellerons, formulation incompressible et non visqueuse de l'équation de Navier Stokes 1D. Nous en dériverons également la formulation , compressible et visqueuse en 1D, puisque l'application à la méthode de Boltzmann développée dans la thèse sera faite (sauf le dernier chapitre en 2D) dans ces hypothèses. C'est l'objet du premier paragraphe.

Nous aborderons ensuite quelques notions de stabilité, trop vaste sujet pour être exhaustif. Nous nous limiterons à quelques définitions simples de la stabilité comme celle de l'énergie bornée d'un système perturbé pour tout temps $t > 0$. Nous montrerons, en particulier dans le second paragraphe, que pour un écoulement avec une base uniforme en espace et stationnaire en temps, les solutions "théoriques" sont toujours stables, donc que toutes les instabilités proviennent du traitement numérique.

Un exemple de discrétisation entraînant des instabilités numériques, le schéma leapfrog est détaillé en Annexe A, car il est utilisé par les auteurs pour la discrétisation de l'équation de Burgers. Le phénomène d'aliasing bien connu dans le traitement du signal, est rapidement rappelé.

1.1 Equations de Navier-Stokes et de Burgers

1.1.1 Equations de Navier-Stokes 3D et 1D compressibles

Les équations de Navier-Stokes décrivent le mouvement des fluides newtoniens (avec coefficients de viscosité constants, comme les liquides et gaz visqueux ordinaires) dans l'approximation des milieux continus. Ce sont des équations aux dérivées partielles non linéaires dont l'existence de solutions et la résolution constituent, dans le cas le plus général, l'un des problèmes complexes du prix du millénaire.

Elles permettent la modélisation approchée des courants océaniques, de l'atmosphère pour les météorologistes, des écoulements autour des avions, des trains à grande vitesse mais aussi de l'écoulement du sang dans les réseaux veineux et artériels.

Nous présenterons la forme la plus générale 3D, puis la formulation incompressible, isotherme de laquelle est dérivée l'équation de Burgers qui fera l'objet du chapitre 2.

1.1.2 Equations de Navier-Stokes en 3D

Les équations de la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie s'écrivent :

- Equation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.1)$$

(Avec ρ : densité, x_i : composantes dans la direction i de la position \mathbf{x} , u_i : composantes dans la direction i de la vitesse \mathbf{u}).

- Equations de conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \rho u_j}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_i} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} \quad (1.2)$$

(Avec p : pression, ρu_i : composantes dans la direction i de la quantité de mouvement $\rho \mathbf{u}$, τ_{ij} : composantes ij du tenseur des contraintes τ , ci après :)

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \xi \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (1.3)$$

(Avec μ, ξ : coefficients de viscosité).

- Equation de conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial (\rho e + p) u_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial (\tau_{ij} u_j)}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad (1.4)$$

(Avec e : énergie interne, q_i : composantes dans la direction i du flux de chaleur \mathbf{q}).

Pour les fluides newtoniens, on prendra en compte l'hypothèse de Stokes $3\xi + 2\mu = 0$, avec μ : viscosité dynamique du fluide, ξ : viscosité de volume, le tenseur des contraintes visqueuses est proportionnel à la partie symétrique du tenseur des taux de déformation.[\[21\]](#)

$$\tau_{ij} = \mu \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \quad (1.5)$$

Le flux de chaleur est proportionnel au gradient de température :

$$q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (1.6)$$

(λ : conductivité thermique, T : température)

1.1.3 Equation de Navier-Stokes en 1D

Les équations de la conservation de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie s'écrivent en 1D :

- Equation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \quad (1.7)$$

- Equation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial x} \quad (1.8)$$

Avec le tenseur τ limité à :

$$\tau = \mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{4}{3} \mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.9)$$

- Equation de conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial (\rho e + p)u}{\partial x} = \frac{\partial (\tau u)}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial x} \quad (1.10)$$

1.1.4 Equations de Navier-Stokes incompressibles, isothermes

Nous nous limiterons, pour ce qui concerne notre thèse aux seuls écoulements isothermes, la prise en compte de la température n'apporterait qu'une complexité supplémentaire sans modifier les conclusions.

L'expression des équations pour des écoulements incompressibles et isothermes est considérablement simplifiée. L'équation de l'énergie est découplée des équations de continuité et de quantité de mouvement. On obtient alors dans ce cas :

- Equation de continuité (ou d'incompressibilité) :

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.11)$$

- Equations de conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \left(\frac{\partial u_j}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_i} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \quad (1.12)$$

On a avec (1.11), comme conséquence de l'incompressibilité l'équation suivante :

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_i} + u_j \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_i} \quad (1.13)$$

Pour un gaz parfait :

$$p = \frac{\rho R T}{M} \quad (1.14)$$

(Avec R : constante des gaz parfaits, M : masse molaire du fluide)
en conséquence p est constante pour un gaz incompressible et isotherme donc :

$$\frac{\partial p}{\partial x_j} = 0$$

L'expression (1.12) devient :

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \eta \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \quad (1.15)$$

(Avec $\eta = \mu/\rho$: viscosité cinématique du fluide).

1.1.5 Equations de Navier-Stokes a-dimensionnées

L'a-dimensionnement des équations de Navier-Stokes fait apparaître un paramètre caractéristique des écoulements : le nombre de Reynolds R_e dont la valeur (R_{ecr} : nombre de Reynolds critique) définit des seuils d'instabilité physique, comme l'écoulement derrière un cylindre, laminaire (stable) pour $R_e < R_{ecr}$ et progressivement turbulent (instable) au dessus (fig 1.1).

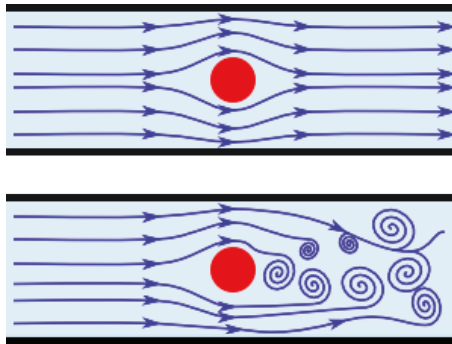


FIGURE 1.1 – Influence de Re

Soit U , une vitesse caractéristique de l'écoulement étudié et L une longueur caractéristique. On considère le temps caractéristique $T = L/U$ et on posera les variables a-dimensionnées suivantes :

$$\hat{x}_i = \frac{x_i}{L}, \hat{t} = \frac{t}{T}, \hat{u}_i = \frac{u_i}{U}, \hat{p} = \frac{p}{\rho U^2} \quad (1.16)$$

Réécrivons l'équation (1.2) en utilisant (1.13). On écrira le membre de gauche :

$$u_j \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + u_j \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^3 \rho u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (1.17)$$

L'équation (1.2) devient :

$$\rho \left(\frac{\partial u_j}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \quad (1.18)$$

En a-dimensionnant suivant (1.16) :

$$\rho \left(\frac{U^2}{L} \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial \hat{t}} + \frac{U^2}{L} \sum_{i=1}^3 \hat{u}_i \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial \hat{x}_i} \right) = -\rho \frac{U^2}{L} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}_j} + \mu \frac{U}{L^2} \frac{\partial}{\partial \hat{x}_i} \left[\left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \hat{x}_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial \hat{x}_i} \right) - \frac{2}{3} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \hat{u}_k}{\partial \hat{x}_k} \delta_{ij} \right] \quad (1.19)$$

En divisant par $\rho U^2/L$ et en posant $\rho L U/\mu = Re$, on obtient :

$$\frac{\partial \hat{u}_j}{\partial \hat{t}} + \sum_{i=1}^3 \hat{u}_i \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial \hat{x}_i} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}_j} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial \hat{x}_i} \left[\left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \hat{x}_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial \hat{x}_i} \right) - \frac{2}{3} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \hat{u}_k}{\partial \hat{x}_k} \delta_{ij} \right] \quad (1.20)$$

On verra pour l'équation de Boltzmann un équivalent au nombre de Reynolds qu'on appellera ω défini différemment. Après ce rappel sur les différentes formes des équations de Navier-Stokes, on utilisera les équations (1.7) à (1.10) suivantes pour le chapitre 3 sur les équations de Boltzmann en monodimensionnel.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{4}{3} \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial (\rho e + p)u}{\partial x} = \frac{4}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (1.23)$$

$$(1.24)$$

1.1.6 Equations de Burger 1D, visqueuse et non visqueuse

Dans le cas incompressible et visqueux, on obtient en monodimensionnel pour l'équation de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} = \frac{4}{3} \eta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.25)$$

Cette équation a-dimensionnée devient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.26)$$

Dans le cas incompressible et non visqueux on obtient en monodimensionnel pour cette même équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.27)$$

Cette dernière équation de Burgers (1.27), modèle de base très simplifié (monodimensionnel, incompressible, non visqueux et isotherme), sera discrétisée en temps et en espace par une équation aux différences finies dans un schéma type leapfrog (Annexe A) . Elle a fait l'objet des études sur les mécanismes d'instabilité numérique sur lesquelles on s'appuiera pour tenter de les appliquer aux équations de Boltzmann. On utilisera dorénavant la notation d'Einstein : quand l'indice d'une variable apparaît deux fois dans un terme, on sous-entend la sommation sur toutes les valeurs que peut prendre cet indice :

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (1.28)$$

1.2 Stabilité

1.2.1 Quelques définitions de stabilité

Nous reprendrons quelques définitions de stabilité dans l'ouvrage de Schmid et Henninson (un livre de chevet remarquable) [22]. On doit toutefois aborder auparavant, pour la première fois (mais non la dernière), la décomposition d'un état perturbé en une composante stationnaire et uniforme de l'état principal et une composante fluctuante de l'état perturbé [23] qui nécessite de définir le concept d'écoulement principal et de petites perturbations.

D'après Chu [24] :

"...Pour un cadre physique donné, les conditions aux limites déterminent usuellement une et une seule solution indépendante du temps. Cette solution sera considérée comme l'écoulement principal. Toute petite déviation de l'écoulement principal est une petite perturbation. En fonction du temps, cette petite perturbation peut croître ou décroître. Cette définition écarte tout écoulement principal dépendant du temps ..."

On définira l'énergie cinétique de la perturbation contenue dans un volume V par :

$$E_v(t) = \frac{1}{2} \int_V u_i(t) u_i(t) dV \quad (1.29)$$

Le choix du volume V dépend des conditions aux limites (nulles à l'infini, périodiques...).

Stabilité Une solution u_i des équations de Navier-stokes est stable à une perturbation si l'énergie de la perturbation satisfait :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E_v(t)}{E_v(0)} \rightarrow 0 \quad (1.30)$$

Stabilité conditionnelle Cette définition provient du fait que la stabilité ou l'instabilité peut dépendre de l'énergie initiale de la perturbation.

S' il existe un seuil d'énergie $\kappa > 0$ tel que u_i est stable quand $E_v(0) < \kappa$, alors la solution u_i est dite conditionnellement stable.

Stabilité monotone Si :

$$\frac{\partial E_v}{\partial t} < 0 \text{ pour tout } t > 0 \quad (1.31)$$

alors la solution est dite monotoniquement stable.

1.2.2 Stabilité hydrodynamique sous écoulement uniforme

Pour un fluide, newtonien, compressible et isotherme, les équations de Navier-stokes s'écrivent :

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (1.32)$$

– Equation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1.33)$$

– Equation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \rho u_j}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (1.34)$$

$$\text{avec } \tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (1.35)$$

Considérons un état uniforme et stationnaire principal $\bar{\rho}, \bar{u}_i, \bar{p}$ et un état perturbé ρ', u'_i, p' . Ecrivons les équations (1.33) et (1.34) pour l' état principal et l'état perturbé.

L'équation de conservation de la masse pour l'écoulement stationnaire est :

$$\frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1.36)$$

L'équation de conservation de la masse pour l'écoulement perturbé est :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} + \rho')(\bar{u}_j + u'_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (1.37)$$

Les équations de conservation de la quantité de mouvement pour l'écoulement stationnaire sont :

$$\frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j} \quad (1.38)$$

$$\text{avec } \bar{\tau}_{ij} = \bar{\mu} \left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \right] \quad (1.39)$$

Les équations de conservation de la quantité de mouvement pour l'écoulement perturbé deviennent après décomposition :

$$\frac{\partial(\bar{\rho} + \rho')(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho} + \rho')(\bar{u}_i + u'_i)(\bar{u}_j + u'_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial x_i} + \frac{\partial(\bar{\tau}_{ij} + \tau'_{ij})}{\partial x_j} \quad (1.40)$$

$$\text{avec } \tau'_{ij} = \bar{\mu} \left[\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u'_k}{\partial x_k} \right] \quad (1.41)$$

On soustrait les équations de l'écoulement stationnaire des équations de l'écoulement perturbé et on négligera les termes quadratiques des petites quantités du second ordre comme $(u'_i u'_j)$.

On obtient alors pour l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho} u'_j + \rho' \bar{u}_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (1.42)$$

et pour les équations de conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial(\bar{\rho} u'_i + \rho' \bar{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{u}_i u'_j + \bar{\rho} \bar{u}_j u'_i + \rho' \bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} \quad (1.43)$$

avec :

$$\tau'_{ij} = \bar{\mu} \left[\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u'_k}{\partial x_k} \right] \quad (1.44)$$

On écrira ces 2 dernières équations sous la forme suivante proposée par Chu dans [24] :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \bar{\rho} \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} = -\bar{u}_j \frac{\partial \rho'}{\partial x_j} = m' \quad (1.45)$$

$$\bar{\rho} \frac{\partial u'_i}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} + F'_i \quad (1.46)$$

$$\text{avec } F'_i = -\bar{u}_i \frac{\partial \rho'}{\partial t} - \bar{u}_i \bar{u}_j \frac{\partial \rho'}{\partial x_j} - \bar{\rho} \bar{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} - \bar{\rho} \bar{u}_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} \quad (1.47)$$

Calculons plus précisément ce terme F'_i :

$$F'_i = -\bar{u}_i \left(-\bar{\rho} \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} - \bar{u}_j \frac{\partial \rho'}{\partial x_j} \right) - \bar{u}_i \bar{u}_j \frac{\partial \rho'}{\partial x_j} - \bar{\rho} \bar{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} - \bar{\rho} \bar{u}_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} \quad (1.48)$$

$$F'_i = -\bar{\rho} \bar{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \quad (1.49)$$

Ces équations accompagnées de l'équation des gaz parfaits, isothermes mise sous la forme :

$$\frac{p'}{\bar{p}} = \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \quad (1.50)$$

gouvernent les changements des variables p', u'_i, ρ' et en conséquence l'évolution de la perturbation et de son énergie.

L'énergie d'une telle perturbation doit tenir compte de l'énergie cinétique, de l'énergie acoustique et pour un écoulement non isotherme de l'énergie thermique. Les différentes normes sur la définition de l'énergie de la perturbation présentées dans la littérature [24, 25] ne sont pas toutes identiques. Elles diffèrent toutefois seulement sur la prise en compte de l'énergie thermique et sont donc semblables pour les écoulements isothermes. Comme nous nous bornerons dans notre étude à des écoulements de ce type (équations de Burgers et Boltzmann) le choix de la "bonne" norme ne se posera donc pas.

On peut construire cette norme d'énergie en multipliant l'équation (1.45) par :

$$\frac{\bar{a}^2}{\gamma} \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \text{ avec } \bar{a}^2 = \frac{\gamma \bar{p}}{\bar{\rho}} \quad (1.51)$$

(avec \bar{a} : vitesse du son dans l'écoulement principal, $\gamma = c_p/c_v$, c_p : chaleur spécifique à pression constante et c_v : chaleur spécifique à volume constant).

et en multipliant l'équation (1.46) par u'_i .

On additionnera ensuite les 2 équations obtenues.

On obtient alors :

$$\frac{\bar{a}^2 \rho'}{\gamma \bar{\rho}} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + u'_i \bar{\rho} \frac{\partial u'_i}{\partial t} = \frac{\bar{a}^2 \rho'}{\gamma \bar{\rho}} m' - \frac{\bar{a}^2 \rho'}{\gamma} \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} - u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_i} + u'_i \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} + u'_i F'_i \quad (1.52)$$

On peut écrire le membre de gauche :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \bar{\rho} (u'_i)^2 + \frac{1}{2} \frac{\bar{a}^2}{\gamma \bar{\rho}} (\rho')^2 \right) \quad (1.53)$$

La quantité :

$$e_a = \left(\frac{1}{2} \bar{\rho} (u'_i)^2 + \frac{1}{2} \frac{\bar{a}^2}{\gamma \bar{\rho}} (\rho')^2 \right) \quad (1.54)$$

a la dimension d'une énergie par unité de volume comportant 2 contributions : l'une d'origine cinétique et l'autre d'origine potentielle. En intégrant sur le volume V l'équation (1.52) on retrouve la variation d'énergie de la perturbation :

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \bar{\rho} (u'_i)^2 + \frac{1}{2} \frac{\bar{a}^2 \rho'^2}{\gamma \bar{\rho}} \right) dV = \int_V \left(\frac{\bar{a}^2 \rho'}{\gamma \bar{\rho}} m' - \frac{\bar{a}^2 \rho'}{\gamma} \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} - u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_i} + u'_i \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} + u'_i F'_i \right) dV \quad (1.55)$$

Examinons les 5 intégrales du second membre en utilisant la définition de la vitesse du son dans l'écoulement principal :

$$\bar{a}^2 = \frac{\gamma \bar{p}}{\bar{\rho}} = \frac{\gamma p'}{\rho'} \quad (1.56)$$

$$I_1 = \int_V \frac{\bar{a}^2 \rho'}{\gamma \bar{\rho}} m' dV = \int_V \frac{p' m'}{\bar{\rho}} dV \quad (1.57)$$

$$I_2 = \int_V -\frac{\bar{a}^2 \rho'}{\gamma} \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} = \int_V -p' \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} dV \quad (1.58)$$

$$I_3 = \int_V -u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_i} dV \quad (1.59)$$

$$I_4 = \int_V u'_i \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} dV = \int_V \frac{\partial (u'_i \tau'_{ij})}{\partial x_j} dV - \int_V \tau'_{ij} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} dV \quad (1.60)$$

$$I_5 = \int_V u'_i F'_i dV \quad (1.61)$$

On peut additionner I_2 et I_3 :

$$I_{23} = I_2 + I_3 = - \int_V \frac{\partial (u'_i p')}{\partial x_i} dV \quad (1.62)$$

On utilise le théorème de la divergence qu'on rappelle :

$$\int \int \int_V \text{div} \mathbf{F} dV = \int \int_{\delta V} \mathbf{F} \mathbf{n} dS \quad (1.63)$$

avec δV frontière de V et $d\mathbf{n}$ vecteur normal à la surface S , soit en l'appliquant à I_{23} et I_4 :

$$I_{23} + I_4 = - \int_V \frac{\partial (u'_i p')}{\partial x_i} dV + \int_V \frac{\partial (u'_i \tau'_{ij})}{\partial x_j} dV - \int_V \tau'_{ij} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} dV \quad (1.64)$$

$$= - \int_S (u'_i p') n dS + \int_S (u'_i \tau'_{ij}) n dS - \int_V \tau'_{ij} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} dV \quad (1.65)$$

Les 2 premières intégrales du second membre sont prises nulles, soit, compte tenu des valeurs aux frontières, soit, et ce sera notre cas, pour des conditions aux limites périodiques donc égales aux 2 bornes. Il reste :

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \int_V \frac{p' m'}{\bar{\rho}} dV + \int_V u'_i F'_i dV - \int_V \tau'_{ij} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} dV \quad (1.66)$$

Examinons les 2 premières intégrales en reprenant les valeurs de m' et F'_i :

$$\int_V \left(\frac{p' m'}{\bar{\rho}} + u'_i F'_i \right) dV = - \int_V \left(\frac{p'}{\bar{\rho}} \bar{u}_j \frac{\partial \rho'}{\partial x_j} + \bar{\rho} \bar{u}_j u'_i \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} \right) dV \quad (1.67)$$

On peut les réécrire :

$$- \frac{1}{2} \int_V \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{u}_j \left(\frac{\rho'}{\bar{\rho}} \right)^2 + \bar{\rho} \bar{u}_j (u'_i)^2) \right] dV \quad (1.68)$$

En réutilisant le théorème de la divergence et la périodicité des solutions, ces 2 intégrales sont également nulles.

On a donc :

$$\frac{\partial E}{\partial t} = - \int_V \tau'_{ij} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} dV \quad (1.69)$$

On va étudier le signe de l'intégrant en posant :

$$\tau'_{ij} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \tau'_{ij} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.70)$$

Si on appelle :

$$e'_{ij} = \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.71)$$

On peut développer l'équation (1.70) [24] :

$$\frac{1}{2} \mu (e'_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} e'_{kk}) e'_{ij} = \frac{\mu}{6} ((e'_{11} - e'_{22})^2 + (e'_{22} - e'_{33})^2 + (e'_{33} - e'_{11})^2 + 6(e'^2_{12} + e'^2_{23} + e'^2_{31})) \geq 0 \quad (1.72)$$

On a donc :

$$\frac{\partial E}{\partial t} = - \int_V \tau'_{ij} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} dV \leq 0 \quad (1.73)$$

Ce terme, représentant la dissipation d'énergie due à l'effet visqueux, est donc toujours négatif.

Pour un écoulement incompressible avec écoulement de base uniforme, les solutions du système continu sont toujours stables.

Cette analyse montre que les instabilités que nous rencontrerons, dues à la discrétisation du temps et de l'espace seront NUMERIQUES. En annexe C, on trouvera la définition des points fixes d'un système différentiel, qui permet dans certaines conditions de définir le contour des zones stables et instables.

On remarquera toutefois que :

Dans le chapitre 5 sur la stabilité non modale, on montre que pour des temps courts, la non-normalité des opérateurs peut montrer des amplifications transitoires non numériques, remettant en cause l'équation :

$$\frac{\partial E}{\partial t} = - \int_V \tau'_{ij} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} dV \leq 0 \quad (1.74)$$

George et Sujith [25], développent chacun des paramètres $\rho'(x, y, t), u'(x, y, t), v'(x, y, t)$ soit $\Phi'(x, y, t)$ sur une base d'ondes planes de la forme :

$$\Phi'(x, y, t) = \tilde{\Phi}(t)e^{ik_x x + ik_y y} \quad (1.75)$$

(Avec k_x, k_y les nombres d'onde dans les directions x, y).

Puis, en adimensionnant le système d'équations (1.42) et (1.43), avec :

$$\hat{\rho}(t) = \frac{\tilde{\rho}(t)}{\bar{\rho}\sqrt{\gamma}}, \hat{u}(t) = \frac{\tilde{u}(t)}{\bar{a}}, \hat{v}(t) = \frac{\tilde{v}(t)}{\bar{a}} \quad (1.76)$$

(avec \bar{a} : vitesse du son dans l'écoulement principal, $\gamma = c_p/c_v$.)
obtiennent le système aux valeurs propres suivant :

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = BY \text{ avec } Y = [\hat{\rho}(t), \hat{u}(t), \hat{v}(t)] \quad (1.77)$$

où B s'écrit :

$$B = \begin{bmatrix} -ik_x \bar{u} & \frac{-ik_x c_0}{\gamma} & \frac{-ik_y c_0}{\gamma} \\ \frac{-ik_x c_0}{\gamma} & -ik_x \bar{u} & 0 \\ \frac{-ik_y c_0}{\gamma} & 0 & -ik_x \bar{u} \end{bmatrix} \quad (1.78)$$

On peut écrire l'énergie de perturbation sur la base des vecteurs propres :

$$E(t) = \frac{\gamma \bar{u} \pi^2}{2k_x k_y} |Y(t)|^2 \quad (1.79)$$

Quand la matrice B est non-normale, on retrouve, temporairement lors de la croissance transitoire, une augmentation de $E(t)$, la norme de l'énergie de perturbation de Chu doit donc être prise au sens asymptotique. Elle permet aussi de capturer la croissance non-modale algébrique (chapitre 5).

1.2.3 Erreur d'aliasing

Représentation d'une fonction sur une grille

Considérons la fonction $u(x)$ d'une seule variable représentée sur une grille par :

$$u_j = u_j(j\Delta x), j = 1, \dots, J+1$$

La fonction peut être décomposée en série de Fourier telle que :

$$u(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n>0} (a_n \cos(2\pi n \frac{x}{L}) + b_n \sin(2\pi n \frac{x}{L})) \quad (1.80)$$

Les $J+1$ valeurs de u_j ne permettent pas de calculer tous les coefficients a_n, b_n mais seulement a_0 et a_n, b_n pour $n \leq \frac{J}{2}$.

La longueur d'onde la plus courte sera donc :

$$\frac{L}{n} = \frac{2L}{J} = \frac{2L}{L/\Delta x} = 2\Delta x \quad (1.81)$$

On voit donc qu'avec les valeurs u_j aux points discrétisés $x = j\Delta x$, il n'est pas possible de représenter des ondes avec des longueurs d'onde inférieures à $2\Delta x$.

Application sur l'équation de Burgers

C'est ce phénomène qui nous conduit aux erreurs d'aliasing dans les termes non linéaires. Considérons les nombres d'onde :

$$k = \frac{2\pi n}{L} \quad (1.82)$$

$$\text{avec, } k_{max} = \frac{\pi}{\Delta x} \quad (1.83)$$

Considérons le terme non linéaire de l'équation de Burgers :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ ou } \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial(u^2)}{\partial x} = 0 \quad (1.84)$$

Supposons dans le cas le plus général que la fonction $u(x)$ consiste en composantes harmoniques :

$$u(x) = \sum_n u_n(x) = \sum_n \sin(k_n x) \quad (1.85)$$

Les termes non linéaires donneront des produits tels que :

$$\sin(k_1 x) \sin(k_2 x) \quad (1.86)$$

Or :

$$\sin(k_1 x) \sin(k_2 x) = \frac{1}{2} (\cos((k_1 - k_2)x) - \cos((k_1 + k_2)x)) \quad (1.87)$$

pour $k \leq k_{max}$

On peut avoir $k_1 + k_2 > k_{max}$ et dans ce cas une sous représentation des ondes se produira. On peut en effet écrire :

$$\cos kx = \cos(2k_{max} - (2k_{max} - k)x) \text{ pour } k_{max} = \frac{\pi}{\Delta x} \quad (1.88)$$

en développant cette expression on obtient :

$$\cos kx = \cos(2k_{max})x \cos(2k_{max} - k)x + \sin(2k_{max})x \sin(2k_{max} - k)x \quad (1.89)$$

Aux points de grille $x = j\Delta x$:

$$\sin\left(\frac{2\pi}{\Delta x} j\Delta x\right) = 0 \text{ et } \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta x} j\Delta x\right) = 1 \quad (1.90)$$

On trouve donc :

$$\cos(kj\Delta x) = \cos((2k_{max} - k)j\Delta x) \quad (1.91)$$

Nous ne pouvons distinguer les termes k des termes $(2k_{max} - k)$.

Donc si $k > k_{max}$, le nombre d'onde k est sous représenté par le nombre d'onde $k = (2k_{max} - k)$.

Analyse linéaire et non linéaire de l'équation de Burgers

Ce chapitre reprend les analyses de stabilité de l'équation de Burgers linéaire et non linéaire, le phénomène de focalisation et son mécanisme.

Les analyses de stabilité linéaire ne rendent pas compte de l'ensemble des mécanismes possibles d'instabilités dues aux non linéarités. Des analyses de stabilité non linéaires ont été abordées par la méthode des ondes résonantes sur différentes équations simples monodimensionnelles, comme les équations de Burgers [10], de Korteweg-de Vries(KdV), [9], discrétisées en différences finies. Nous souhaitons valider l'utilisation de cette méthode d'analyse non linéaire sur la méthode de Boltzmann sur réseau. Nous présentons donc cette méthode pour l'équation de Burgers, en analysant plus profondément le phénomène d'instabilité suivant : les solutions exactes des équations d'amplitude qui sont dans la région stable sont INSTABLES, un mécanisme de focalisation se met en place et induit des instabilités.

Plusieurs méthodes sont examinées pour approfondir les causes de ce mécanisme. Les annexes A, B, D approfondissent cette analyse.

2.1 Description du phénomène

On décrira les différentes phases aboutissant au phénomène de focalisation.

Phase 1

Equation de base de Burgers :

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + u(t, x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

avec les conditions périodiques aux frontières $u(t, 0) = u(t, 1)$ et les conditions initiales $u(0, x) = u_0(x)$

Phase 2

Décomposition de $u(t, x)$ en une composante constante \bar{u} et une composante perturbée $u'(t, x)$ telle que :

$$u(t, x) = \bar{u} + u'(t, x) \quad (2.2)$$

L'équation (2.1) devient alors :

$$\frac{\partial u'(t, x)}{\partial t} + (\bar{u} + u'(t, x)) \frac{\partial u'(t, x)}{\partial x} = 0 \quad (2.3)$$

On utilise l'égalité suivante :

$$u'(t, x) \frac{\partial u'(t, x)}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial u'(t, x)^2}{\partial x} \quad (2.4)$$

pour écrire le terme non linéaire de l'équation (2.1) sous la forme suivante :

$$u'(t, x) \frac{\partial u'(t, x)}{\partial x} = (1 - \Theta) u'(t, x) \frac{\partial u'(t, x)}{\partial x} + \frac{1}{2} \Theta \frac{\partial u'(t, x)^2}{\partial x} \quad (2.5)$$

Avec $0 \leq \Theta \leq 1$.

Phase 3

Discretisation de $u'(t, x)$ en temps t et en espace x :

On discrétise l'espace en $x = n\Delta x$ avec $\Delta x = h = \frac{1}{N}$ et le temps en $t = m\Delta t$ avec $\Delta t = k$.
On écrira $u'(t, x) = u'(mk, nh)$ qu'on simplifiera en $u(m, n)$.

Phase 4

Discretisation de l'équation (2.5) en différences finies du second ordre leapfrog (Annexe A) :

L'équation aux différences finies s'écrit :

$$u(m+1, n) - u(m-1, n) + \frac{\Theta\gamma}{2} [u^2(m, n+1) - u^2(m, n-1)] \\ + [(1 - \Theta)\gamma u(m, n) + \beta] [u(m, n+1) - u(m, n-1)] = 0 \quad (2.6)$$

(Avec $\gamma = k/h, \beta = k\bar{u}/h$ et $0 \leq n \leq N-1, m > 1$).

La condition périodique aux limites se traduit par : $u(m, 0) = u(m, 1)$.

Phase 5

Analyse linéaire de l'équation (2.6)

Le problème linéaire associé s'écrit :

$$u(m+1, n) - u(m-1, n) + \beta[u(m, n+1) - u(m, n-1)] = 0 \quad (2.7)$$

$$0 \leq n \leq N-1. \quad (2.8)$$

On retrouve les 2 modes étudiés dans l'annexe A : l'un physique ϕ_1 , le second numérique ϕ_2 .

$$\phi_{1,2} = \arctan \left\{ \frac{\beta \sin(2p\pi/N)}{\pm \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2(2p\pi/N)}} \right\} \quad (2.9)$$

Phase 6

Analyse non linéaire de l'équation (2.6) en ondes résonantes :

La perturbation u' consiste en un petit nombre $N_1 < N$ de modes linéaires de petites longueurs d'onde λ_l qui sont des multiples du pas de la grille $\lambda_l = lh$. Comme l'équation est non linéaire, les N_1 équations d'amplitude ne sont pas fermées. Nous chercherons des solutions exactes par superposition de ces modes linéaires. On choisira cette série de modes de telle façon qu'elle comporte les harmoniques qui apparaîtront à travers le terme quadratique et donc seront résonants, à savoir :

Pour 3 modes, on choisirait comme mode primaire $\pi/3 + c.c.$ de longueur d'onde $\lambda = 6h$ et ses harmoniques $2\pi/3 + c.c.$, $3\pi/3 = \pi$.

Pour 4 modes, on choisirait comme mode primaire $\pi/4 + c.c.$ de longueur d'onde $\lambda = 8h$ et ses harmoniques $2\pi/4 = \pi/2 + c.c.$, $3\pi/4 + c.c.$, $4\pi/4 = \pi$.

On voit, pour ces superpositions de modes, que tout produit quadratique redonne le mode primaire ou un autre harmonique.

Les auteurs [7] ont étudié ces combinaisons pour lesquelles les calculs deviennent fastidieux et l'interprétation des résultats presque impossible. Leur application aux équations "vectorielles" de Boltzmann, complexifiant encore les équations, ne sera en conséquence pas faite. Nous nous limiterons donc aux solutions à 1 mode et 2 modes qui ont été les plus étudiées.

Pour 1 mode, on choisit comme mode primaire $2\pi/3 + c.c.$ de longueur d'onde $\lambda = 3h$ et dont l'harmonique $4\pi/3 = -2\pi/3$ est le conjugué du mode primaire.

Pour 2 modes, on choisit comme mode primaire $\pi/2 + c.c.$ de longueur d'onde $\lambda = 4h$ et son harmonique $2\pi/2 = \pi$.

On calcule avec les 2 combinaisons d'ondes résonantes précédemment décrites la stabilité de l'équation de Burgers (2.6), les solutions "exactes" (exactes au sens de la prise en compte de la non linéarité, non exactes (ou approchées), avec la discrétisation en temps et en espace). Nous pouvons ainsi déterminer des courbes d'instabilité de l'énergie de la perturbation en fonction de l'amplitude de l'énergie initiale $E_0 = \sum_n u(0, n)^2$ et de l'amplitude de la composante stationnaire \bar{u} . Nous ferons varier \bar{u} la composante stationnaire, et l'amplitude des conditions initiales σ pendant un temps maximum de $2000 \Delta t$. En fonction de la valeur de l'énergie $E(t) = E(m) = \sum_n u(m, n)^2$ obtenue après ces $2000 \Delta t$, on détermine la stabilité de la solution

par rapport à une valeur maximum de l'énergie $E_{max} = 10^6$. On définit ainsi une zone stable (blanche) et une zone instable (noire), figure (2.1) comme le montre la figure (2.1) obtenue pour 1 mode.

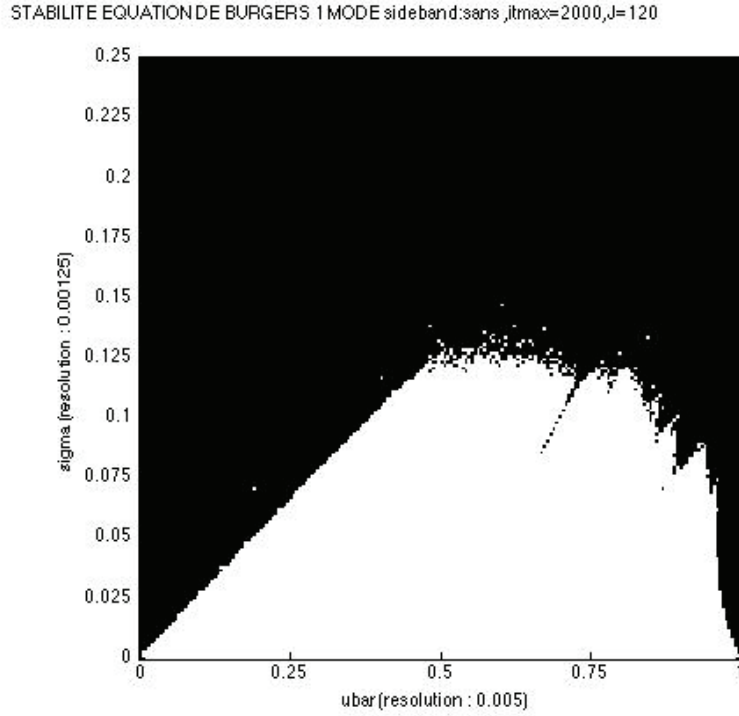


FIGURE 2.1 – Carte de stabilité pour 1 mode, $\bar{u} = [0, 1]$, $\sigma = [0, 0.25]$, Nombre de pas de temps=2000, Nombre de pas d'espace=120.

Phase 7

Focalisation :

On peut obtenir, dans certaines conditions, que les solutions des équations d'amplitude qui sont dans la région stable deviennent INSTABLES. Un mécanisme de focalisation se met en place et induit des instabilités. Une première explication de ce phénomène a été décrite dans le travail de Phillips [26] : "L'instabilité provient du fait que la grille ne peut pas résoudre des longueurs d'onde plus courtes que $2\Delta x$. Quand de telles longueurs d'onde sont formées par les interactions non linéaires de longueurs d'onde plus grandes, la grille les interprète non correctement (aliasing du chapitre 1).

Les auteurs [7, 8, 9, 10, 11, 12] ont proposé un mécanisme autre ou complémentaire pour expliquer la déstabilisation de l'algorithme numérique de l'équation de Burgers aux différences finies. Ils rendent responsables de l'instabilité, l'interaction entre le mode physique et le mode parasite, produits par le schéma leapfrog (Annexe A).

Nous venons donc de rappeler les différentes phases du processus, afin de pouvoir montrer son application à la LBM du chapitre suivant, ainsi que les différences associées. Nous reprendrons dans ce but les éléments principaux des publications [7, 8, 9, 10, 11, 12] en les complétant par ailleurs.

2.2 Analyse non linéaire en ondes résonantes

2.2.1 Analyse non linéaire : ondes résonantes sur 1 mode

Nous étudierons cette solution à un mode analytiquement simple, non explicitement montrée dans les travaux de [7], dans le but de connaître la zone de stabilité que nous prendrons en compte, pour réaliser et tenter de comprendre le phénomène de focalisation.

Soit une solution de la forme :

$$u(m, n) = A(m)e^{in2\pi/3} + A^*(m)e^{-in2\pi/3} \quad (2.10)$$

La substitution de cette solution dans (2.6) donne l'équation d'amplitude suivante en $e^{i2n\pi/3}$:

$$A(m+1) = A(m-1) - i\beta\sqrt{3}A(m) + i\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma(2-3\theta)A^*(m)^2 \quad (2.11)$$

Nous prendrons $\theta = 0$ et l'équation deviendra :

$$A(m+1) = A(m-1) - i\beta\sqrt{3}A(m) + i\sqrt{3}\gamma A^*(m)^2 \quad (2.12)$$

Nous calculerons la carte d'instabilité non linéaire avec les conditions initiales suivantes :

$$u(0, n) = u(1, n) = \sigma((1+i)e^{i(2\pi/3)n} + (1-i)e^{-i(2\pi/3)n}) \quad (2.13)$$

Avec une amplitude E_0 :

$$E_0 = \max |u(m, n)| = 2\sigma \text{ et } 0 \leq n \leq N, m = 0, 1. \quad (2.14)$$

La carte de la figure (2.1) montre les régions du plan \bar{u}, σ qui correspondent aux solutions stables et instables de l'énergie au temps $t = 2000\Delta t$:

$$E_m = \sum_{n=1}^N (u(m, n))^2 \quad (2.15)$$

2.2.2 Analyse non linéaire : ondes résonantes sur 2 modes

Nous examinerons attentivement la solution à 2 modes, dont le comportement est supposé le plus instable, et qui a fait l'objet d'une analyse complète chez les auteurs [7, 8, 9, 10, 11, 12].

Soit une solution de la forme :

$$u(m, n) = A(m)e^{in\pi/2} + A^*(m)e^{-in\pi/2} + B(m)e^{in\pi} \text{ avec } B \in \mathbb{R} \quad (2.16)$$

La substitution de cette solution dans (2.6) donne les équations d'amplitude suivantes, en prenant comme [7] $\Theta = 2/3$:

$$A(m+1) - A(m-1) = -2i\beta A(m) - \frac{2i\gamma}{3} A^*(m)B(m) \quad (2.17)$$

$$B(m+1) - B(m-1) = -\frac{2i\gamma}{3} (A^2(m) - A^{*2}(m)) \quad (2.18)$$

On peut noter à travers le terme $A^*(m)B(m)$ de l'équation d'amplitude du mode $\pi/2$ (2.17), l'interaction entre le mode conjugué ($-\pi/2$) et le mode π . On peut examiner également le rôle joué par le mode de calcul de la manière suivante :

Initialement on peut considérer les amplitudes de $A(m)$ et de $B(m)$, petites tel que leur développement soit déterminé par les équations linéarisées de (2.17).

Nous aurons alors avec l'indice p pour le mode physique et l'indice c pour le mode numérique :

$$A(m) = A_p e^{-im\phi_1} + A_c e^{-im\phi_2} \quad (2.19)$$

$$B(m) = B_p (-1)^m + B_c \quad (2.20)$$

Avec ϕ_1 mode physique et ϕ_2 mode numérique, les 2 modes étant reliés par $\phi_2 = \pi - \phi_1$. Soit en remplaçant :

$$B(m+1) - B(m-1) = -\frac{2i\gamma}{3} (A_c^2 - A_p^2) e^{2im\phi} - \frac{2i\gamma}{3} (A_p^2 - A_c^2) e^{-2im\phi} + \frac{8}{3} \gamma (-1)^m \mathcal{I}(A_p A_c) \quad (2.21)$$

On peut intégrer l'équation (2.21) :

$$B(m) = (\text{solutions homogènes}) + ae^{2im\phi} + be^{-2im\phi} - \frac{2}{3} \gamma \mathcal{I}(A_p A_c) (-1)^m m \quad (2.22)$$

Le terme non linéaire de l'équation pour $A(m)$ répercutera cette croissance de $B(m)$:

$$\begin{aligned} A^*(m)B(m) = & e^{im\phi} \left(-\frac{2}{3} \gamma \mathcal{I}(A_p A_c) A_c^* m + b A_p^* + A_c^* B_p + A_c^* B_c (-1)^m \right) \\ & + e^{im\phi} \left(-\frac{2}{3} \gamma \mathcal{I}(A_p A_c) A_p^* m + a A_c^* + A_p^* B_c + A_p^* B_p (-1)^m \right) \\ & + (\text{harmoniques plus hauts}) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Nous observons que ce terme comprend une croissance linéaire en m , facteur du mode numérique. Cette double interaction déclenche l'instabilité.

Nous calculerons la carte d'instabilité non linéaire avec les conditions initiales suivantes :

$$u(0, n) = u(1, n) = \sigma((1 + i)e^{i(\pi/2)n} + (1 - i)e^{-i(\pi/2)n} + e^{i\pi n}) \quad (2.24)$$

Avec une amplitude E_0 :

$$E_0 = \max |u(m, n)| = 3\sigma \text{ et } 0 \leq n \leq N, m = 0, 1 \quad (2.25)$$

La carte de la figure (2.2) montre les régions du plan \bar{u}, σ qui correspondent aux solutions stables et instables de l'énergie au temps $t = 2000\Delta t$.

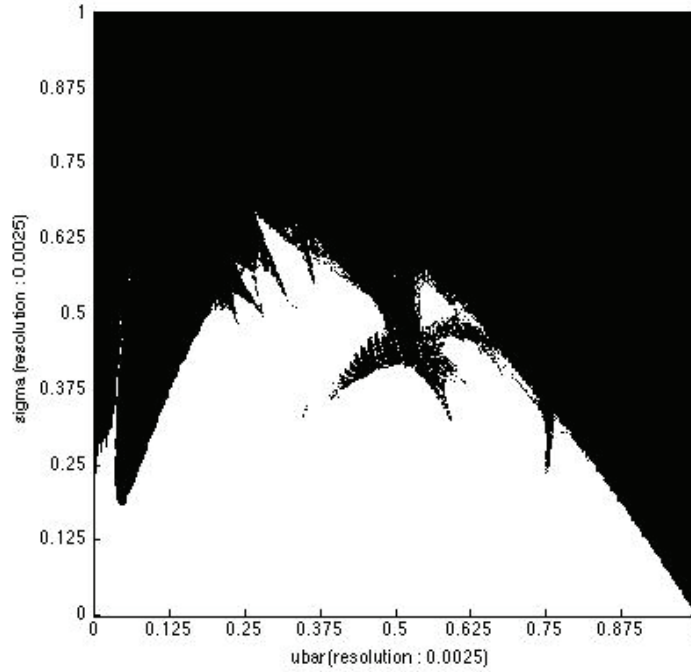


FIGURE 2.2 – Carte de stabilité pour 2 modes,
 $\bar{u} = [0, 1], \sigma = [0, 1]$, Nombre de pas de temps=2000, Nombre de pas d'espace=120.

$$E_m = \sum_{n=1}^N (u(m, n))^2 \quad (2.26)$$

Il semble que le critère d'instabilité pour E_m ne soit pas produit dans les différentes publications [7, 8, 9, 10, 11, 12]. Toutefois la carte reproduite sur la figure (2.2), réalisée avec le critère de stabilité de $E_m < 10^6$, nous paraît être identique à celle de la figure (1.b) de [7]. Ce critère sera celui utilisé dans la suite de la thèse.

2.2.3 Remarques pour l'application des modes résonants à l'équation de Boltzmann

Les produits des modes résonants par leurs conjugués s'annulent dans l'équation de Burgers.

Développons l'équation (2.6) avec $\Theta = \frac{2}{3}$.

$$u(m+1, n) - u(m-1, n) + \frac{\gamma}{3}[u^2(m, n+1) - u^2(m, n-1)] + \left[\frac{\gamma u(m, n)}{3} + \beta\right][u(m, n+1) - u(m, n-1)] = 0 \quad (2.27)$$

Reportons dans cette équation $u(m, n)$ tel que :

$$u(m, n) = A(m)e^{in\pi/2} + A^*(m)e^{-in\pi/2} + B(m)e^{in\pi} \quad (2.28)$$

L'équation (2.27) s'écrit comme la somme de trois termes :

– Premier terme :

$$(A(m+1) - A(m-1))e^{in\pi/2} + (A^*(m+1) - A^*(m-1))e^{-in\pi/2} + (B(m+1) - B(m-1))e^{in\pi} \quad (2.29)$$

– Second terme :

$$\frac{\gamma}{3}[(A(m)e^{i(n+1)\pi/2} + A^*(m)e^{-i(n+1)\pi/2} + B(m)e^{i(n+1)\pi})^2 - (A(m)e^{i(n-1)\pi/2} + A^*(m)e^{-i(n-1)\pi/2} + B(m)e^{i(n-1)\pi})^2] \quad (2.30)$$

– Troisième terme :

$$\left[\frac{\gamma}{3}(A(m)e^{in\pi/2} + A^*(m)e^{-in\pi/2} + B(m)e^{in\pi}) + \beta\right][A(m)(e^{i(n+1)\pi/2} - e^{i(n-1)\pi/2}) + A^*(m)(e^{-i(n+1)\pi/2} - e^{-i(n-1)\pi/2}) + B(m)(e^{i(n+1)\pi} - e^{i(n-1)\pi})] \quad (2.31)$$

Nous pouvons déjà voir dans le second et le troisième terme, les produits croisés, comme : $Ae^{in\pi/2}A^*e^{-in\pi/2} = AA^*$ qui ici vont s'annuler entr'eux, mais poseront des difficultés, car non nuls, dans l'équation de Boltzmann. La résolution de cette difficulté sera un petit apport de cette thèse.

Développons à titre d'exemple le second terme (nous simplifierons $A(m)$ en A) :

$$\frac{\gamma}{3}[(A^2e^{i(n+1)\pi} + (A^*)^2e^{-i(n+1)\pi} + B^2 + 2AA^* + 2ABe^{-i(n+1)\pi/2} + 2A^*Be^{i(n+1)\pi/2}) - (A^2e^{i(n-1)\pi} + (A^*)^2e^{-i(n-1)\pi} + B^2 - 2AA^* - 2ABe^{-i(n-1)\pi/2} + 2A^*Be^{i(n-1)\pi/2})] \quad (2.32)$$

Regroupons les termes, après avoir vu que les produits $2AA^*$ et B^2 s'annulaient :

$$\frac{\gamma}{3}[(A^2e^{in\pi}(e^{i\pi} - e^{-i\pi}) + (A^*)^2e^{-in\pi}(e^{-i\pi} - e^{i\pi}) + 2ABe^{-in\pi/2}(e^{-i\pi/2} - e^{i\pi/2}) + 2A^*Be^{in\pi/2}(e^{i\pi/2} - e^{-i\pi/2})] \quad (2.33)$$

Ce terme se limite, après la simplification des termes en facteur des exponentielles, à :

$$\frac{4i\gamma}{3}[-ABe^{-in\pi/2} + A^*Be^{in\pi/2}] \quad (2.34)$$

De la même façon on trouverait en final pour le troisième terme :

$$\frac{2i\gamma}{3}[(A^2 - (A^*)^2)e^{in\pi} + ABe^{-in\pi/2} - A^*Be^{in\pi/2}] + 2i\beta(Ae^{in\pi/2} - A^*e^{-in\pi/2}) \quad (2.35)$$

Après avoir regroupé tous les termes produits de $e^{in\pi/2}$ et de $e^{in\pi}$ on retrouve bien (2.17) :

$$[A(m+1, n) - A(m-1, n) + 2i\beta A(m, n) + \frac{2i\gamma}{3}A(m, n)^*B(m, n)]e^{in\pi/2} = 0 \quad (2.36)$$

$$[B(m+1, n) - B(m-1, n) + \frac{2i\gamma}{3}(A^2 - (A^*)^2)]e^{in\pi} = 0 \quad (2.37)$$

Initialisation des équations

Nous avons initialisé directement la variable $u(m, n)$, la seule contrainte restant l'initialisation des 2 premiers pas de temps, compte tenu du schéma leapfrog en temps choisi. Dans l'application des modes résonants à l'équation de Boltzmann, nous serons confrontés à deux problèmes :

- d'une part devoir initialiser les variables non directement accessibles physiquement que sont les fonctions de distribution discrètes (chapitre 3 : équation de boltzmann à vitesses discrètes)
- d'autre part devoir initialiser les 3 composantes de ces fonctions (dans le cas des 3 vitesses discrètes d'un réseau D1Q3), mais de 9 composantes pour un réseau D2Q9 (chapitre 6).

Nous montrerons alors que seulement quelques types caractéristiques et limités d'initialisation peuvent se présenter, avec des résultats finaux pouvant être fort différents.

2.3 Mécanisme de focalisation et d'instabilité

Plusieurs paramètres explicatifs peuvent être considérés comme acteurs dans le mécanisme de focalisation : les erreurs d'arrondi dans les calculs, la discrétisation elle-même spatiale et temporelle, le mode parasite inérant au schéma leapfrog, les erreurs d'aliasing dues aux interactions non-linéaires.

Les auteurs et en particulier [8] proposent les phases suivantes dans ce mécanisme :

1. Des modes de sideband , qui ne sont pas représentées par les 1 ou 2 modes primaires, sont créées par les erreurs d'arrondi dans la discrétisation.
2. Ces modes sont alors amplifiées par les interactions non linéaires avec les modes primaires, si ceux-ci possèdent suffisamment d'énergie.
3. L'instabilité apparait comme une déformation de l'enveloppe des modes primaires.
4. Cette distorsion se développe localement.
5. La solution numérique devient non-bornée.

Ces différents paramètres présenteront des formes différentes pour notre application à l'équation de Boltzmann. On conservera bien évidemment les erreurs d'arrondi, le caractère non linéaire des équations et les erreurs d'aliasing. Les discrétisations avec la méthode des caractéristiques et celle des trapèzes présenteront des caractéristiques différentes de la méthode leapfrog. Le mécanisme, s'il perdure dans ce cas, pourrait en être modifié.

On verra que la prise en compte des modes de sideband sera déjà difficile dans le cas monodimensionnel de Burgers, même en se limitant à la solution à 1 mode, et que les auteurs [7, 8] se sont souvent appuyés sur l'expérience numérique. On peut déjà supposer que le cas vectoriel de l'équation de Boltzmann pourra poser quelques difficultés supplémentaires de modélisation, d'intégration des équations différentielles et donc d'interprétation.

Nous avons cependant repris l'étude des interactions des modes de sideband avec le mode primaire pour l'équation continue originelle de Burgers. Le but de cette analyse est de montrer que l'accroissement des modes de sideband dans le cas général n'aboutit pas à des instabilités, sauf lors du passage à une discrétisation leapfrog du temps.

Ce résultat permettrait d'une part de confirmer que c'est ce schéma de discrétisation de l'équation de Burgers qui provoque la focalisation, et d'autre part de préparer la compréhension du comportement de l'équation de Boltzmann avec un schéma de discrétisation différent ne comportant pas les modes parasites, vis à vis du phénomène de focalisation.

On s'appuiera sur les modélisations théoriques de Sloan et Mitchell [8] destinées à obtenir les conditions de la croissance des solutions par des simplifications du système d'équations et l'utilisation de la méthode des échelles multiples à temps rapide et lent.

Reprenons l'équation de Burgers (2.3) :

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + (\bar{u} + u') \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad (2.38)$$

Nous allons définir des solutions avec des modes de sideband sous la forme continue ou discrétisée en espace :

$$u'(x) = (A_0(t)e^{iKx} + A_2(t)e^{i(K+K_s)x} + c.c.) \quad (2.39)$$

(Avec K, K_s nombre d'onde du mode primaire et nombre d'onde du mode de sideband).

Cette forme est obtenue de la manière suivante :

On rappelle que la perturbation u' consiste en un petit nombre J de modes de grands nombres d'onde qui sont des multiples du pas de la grille :

$$\Delta x = h = \frac{1}{J} \quad (2.40)$$

La longueur d'onde de l'onde primaire (pour la solution résonante à 1 mode) est : $\lambda = 3h$, le nombre d'onde est :

$$K = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{3h} = \frac{2\pi}{3}J. \quad (2.41)$$

Donc le mode principal $u'(x) = A_0 e^{iKx}$ s'exprime au pas d'espace j par :

$$u'_j = A_0(t)e^{i\frac{2\pi}{3h}jh} = A_0(t)e^{i\frac{2\pi}{3}j} = A_0(t)e^{ikj} \quad (2.42)$$

Le nombre d'onde du mode de sideband sera $K_s = \mu J$ avec $\mu J = 2\pi\delta$ et δ entier positif souvent pris égal à 3.

La longueur d'onde sera donc de $\lambda_s = 2\pi/\mu J = 1/\delta$ grand par rapport à $\lambda = 3h$.

Dans les modes de sideband on a donc $(K + K_s)x = Kx + 2\pi\delta jh = Kx + \mu Jjh = Kx + \mu Jj/J = \frac{2\pi}{3}j + \mu j$ et sont, en appelant $k = \frac{2\pi}{3}$, de la forme :

$$u'_{sj} = A_2(t)e^{i(k+\mu)j} + c.c. \quad (2.43)$$

Avec $A_0(t) \gg A_2(t)$, la solution perturbée sera donc bien de la forme onde primaire plus ondes de sideband :

$$u'_j = A_0(t)e^{ikj} + A_2(t)e^{i(k+\mu)j} + c.c. \quad (2.44)$$

2.4 Quelques résultats sur la focalisation

Pour bien comprendre le processus, nous avons provoqué comme les auteurs, le mécanisme de focalisation sur les solutions résonantes à 1 et 2 modes, en introduisant les modes de sideband à des amplitudes extrêmement faibles.

Dans ces 2 configurations, nous avons provoqué les focalisations dans les mêmes conditions que [7] avec une amplitude de sideband ($A_2 = 0.000005$, δ étant égal à 3), à plusieurs points (\bar{u}, σ) situés dans la zone stable (blanche) et en laissant évoluer le temps pour détailler le mécanisme.

2.4.1 Exemples de focalisation sur les solutions à 1 mode

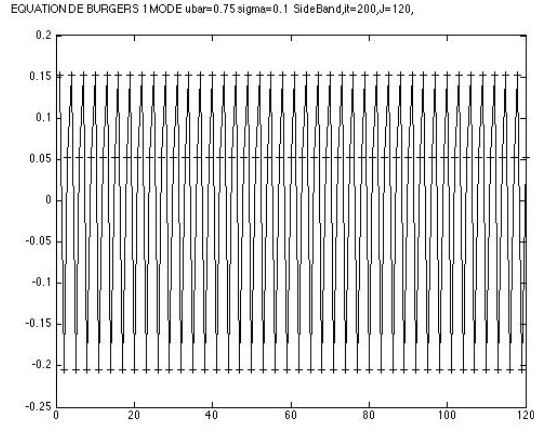
Nous avons estimé, que pour appuyer les études théoriques du paragraphe suivant qui tentent d'expliquer le mécanisme de focalisation sur les solutions résonantes à 1 mode (moins complexes à modéliser, quoique), il fallait également provoquer la focalisation, ce que n'ont pas présenté les auteurs dans les publications.

Dans cette configuration, nous avons provoqué les focalisations avec les conditions précédentes : amplitude du mode de sideband supérieur de $A_2 = 0.000005$, δ est égal à 3, et le nombre de pas d'espace, égal à 120.

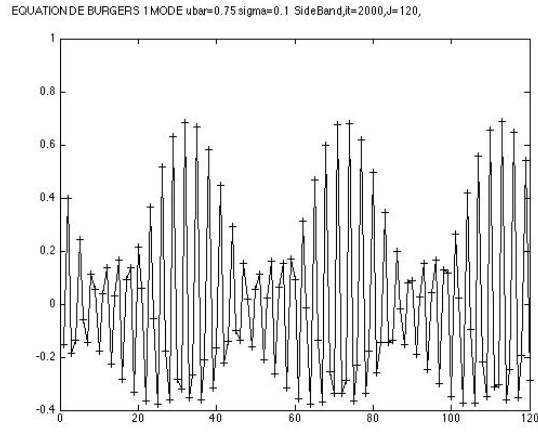
Sur la carte de stabilité figure (2.1) nous avons focalisé au point $\bar{u} = 0.75$, $\sigma = 0.1$. La figure (2.3) montre la solution initiale $u_j = u(x)$, $j = 1, 120$, pour différentes valeurs croissantes du temps, le processus de focalisation avec dépassement de seuil.

La figure suivante (2.4), transformée de Fourier, de ces mêmes courbes, montre quant à elle la naissance de modes supplémentaires de sideband.

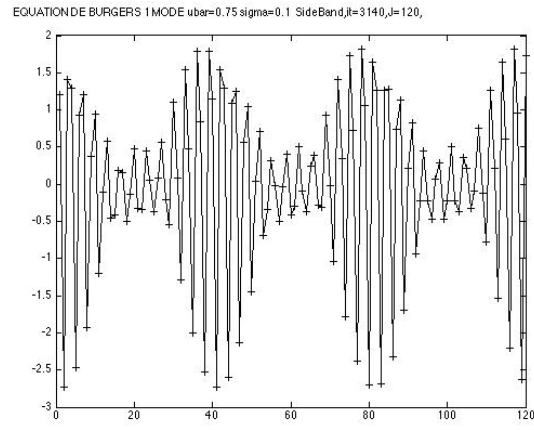
La carte suivante figure (2.5) a été obtenue de la même façon que la figure initiale (2.1) mais en intégrant dans les équations les modes de sideband et en résolvant le système pour



(a)



(b)

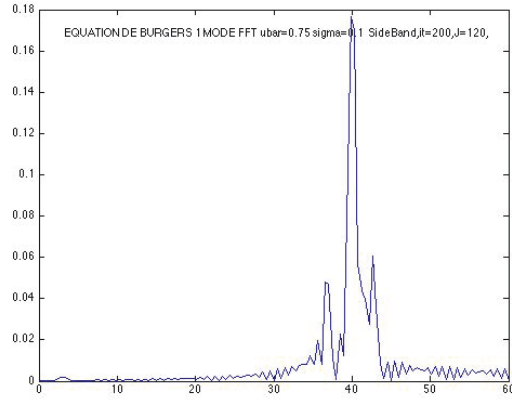


(c)

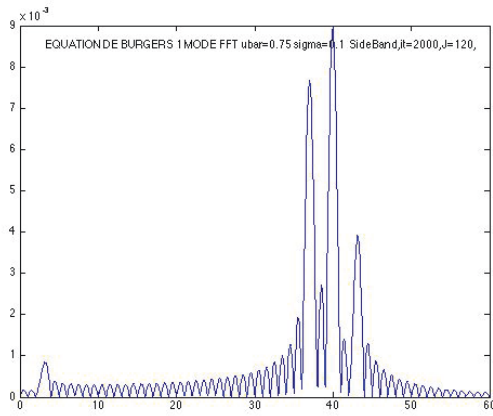
FIGURE 2.3 – Solution du mode 1,
 $\bar{u} = 0.75, \sigma = 0.1, J = 120, \delta = 3, \mu = 0.000005, t = 200, 2000, 3140$

A_0, A_1, A_2, b (détails de calcul en annexe B).

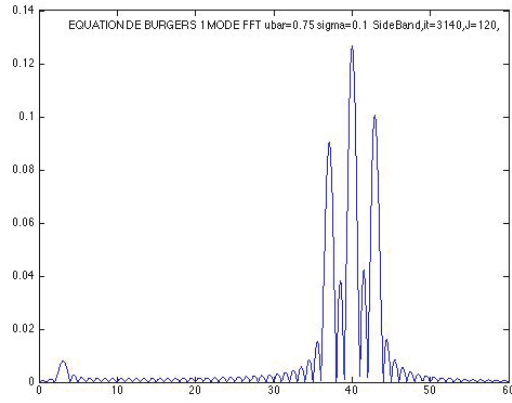
On remarque immédiatement le développement d'une zone complémentaire d'instabilité, zone dans laquelle se situe l'ensemble des points de focalisation et en particulier le point $(0.75, 0.1)$.



(a)



(b)



(c)

FIGURE 2.4 – Transformée de Fourier de u ,
 $\bar{u} = 0.75, \sigma = 0.1, J = 120, \delta = 3, \mu = 0.000005, t = 200, 2000, 3140$

2.4.2 Exemples de focalisation sur les solutions à 2 modes

Dans cette configuration, nous avons provoqué les focalisations dans les mêmes conditions que précédemment avec une amplitude du mode de sideband de $A_2 = 0.000005$ et un nombre de pas d'espace passant à 300. Sur la carte de stabilité figure (2.2), nous avons focalisé au point $\bar{u} = 0.625, \sigma = 0.23$, et au point plus énergétique $\bar{u} = 0.9, \sigma = 0.11$.

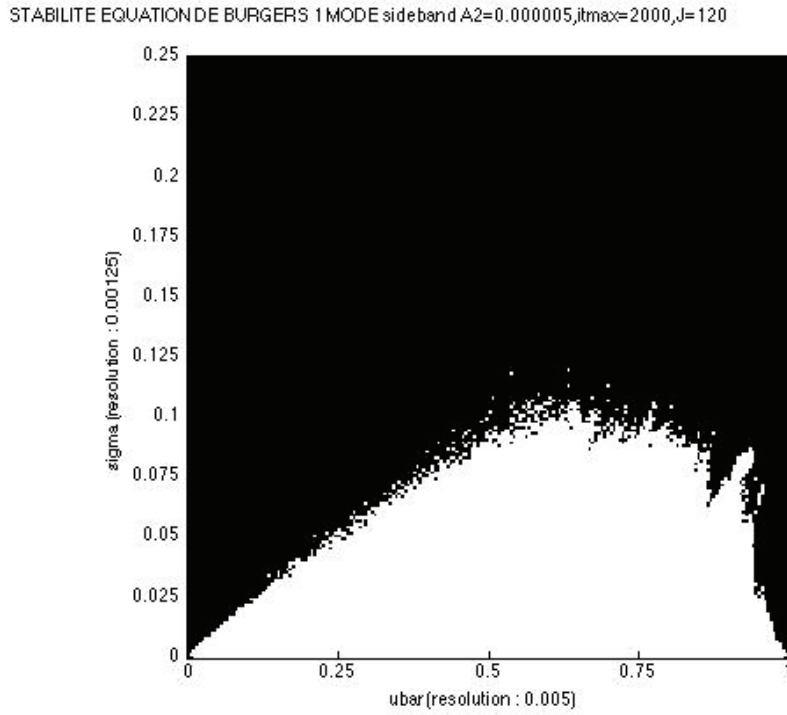


FIGURE 2.5 – Carte de stabilité avec sideband pour 1 mode, $\bar{u} = [0, 1]$, $\sigma = [0, 0.25]$, $J = 120$, $\delta = 3$, $\mu = 0.000005$, $t = 2000$.

Les figures (2.6) et (2.8) montrent les solutions obtenues $u_j = u(x)$, $j = 1, 300$, pour les 2 points, pour différentes valeurs croissantes du temps, le processus de focalisation avec dépassement de seuil.

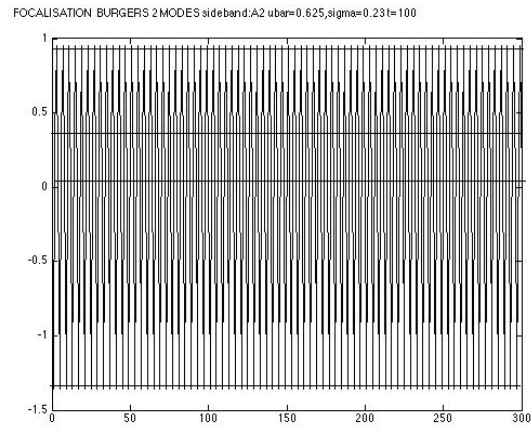
Les figures (2.7) et (2.9) représentent les transformées de Fourier correspondantes, elles montrent la croissance des modes de sideband.

Pour clore ces exemples, nous avons pour le point : $(0.9, 0.11)$ et $j = 122$, figuré le développement de $u(t, 122)$ figure (2.10).

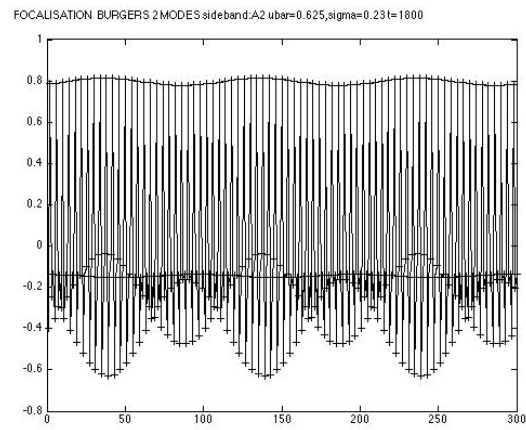
La carte suivante, figure (2.11) a été obtenue de la même façon que la figure initiale (2.2) mais en intégrant dans les équations les modes de sideband, et en résolvant le système pour A_0, A_1, A_2, b .

On remarque immédiatement le développement d'une grande zone complémentaire d'instabilité, zone dans laquelle se situe l'ensemble des points de focalisation, et en particulier les points : $(0.625, 0.23)$ et $(0.9, 0.11)$. L'importance de cette zone potentiellement instable, peut expliquer l'instabilité de la solution à 2 modes.

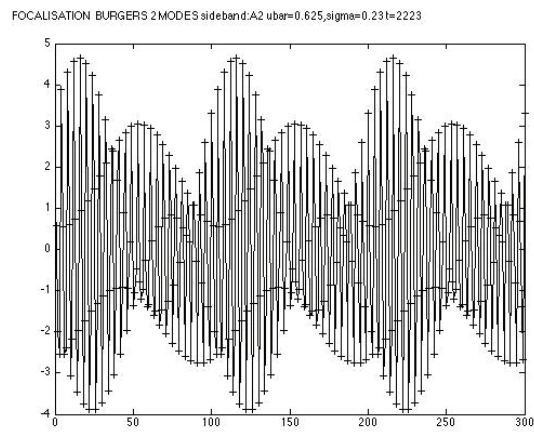
Nous reprendrons les analyses [8] qui ont été faites en les complétant, pour tenter d'expliquer cette instabilité, d'une part par une méthode d'échelles multiples pour les équations continues, et d'autre part pour les équations discrétisées en temps par la méthode leapfrog. Cette réanalyse a pour but de mieux comprendre les méthodes afin de pouvoir éventuellement les appliquer aux équations issues de la méthode de Boltzmann.



(a)

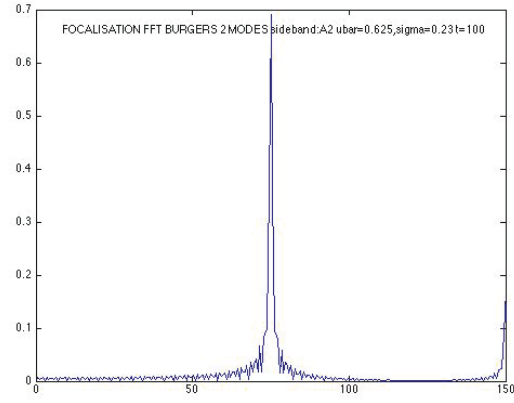


(b)

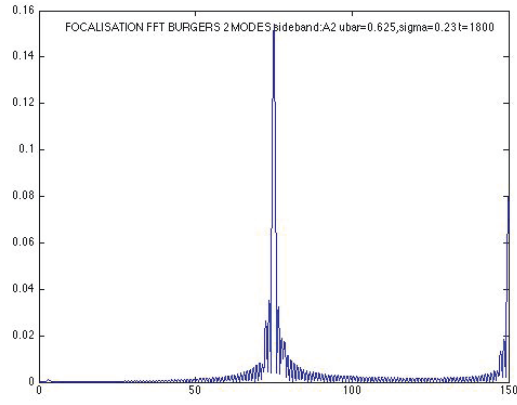


(c)

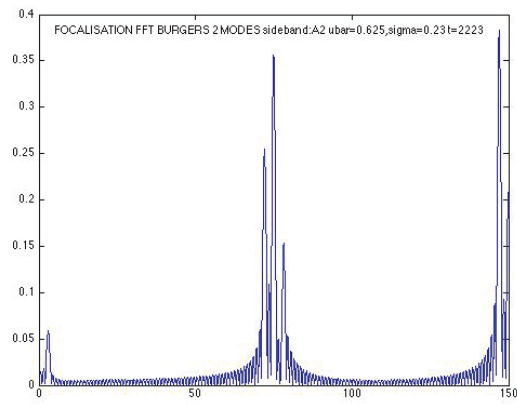
FIGURE 2.6 – Solution du mode 2,
 $\bar{u} = 0.625, \sigma = 0.23, J = 300, \delta = 3, \mu = 0.000005, t = 100, 1800, 2223$



(a)

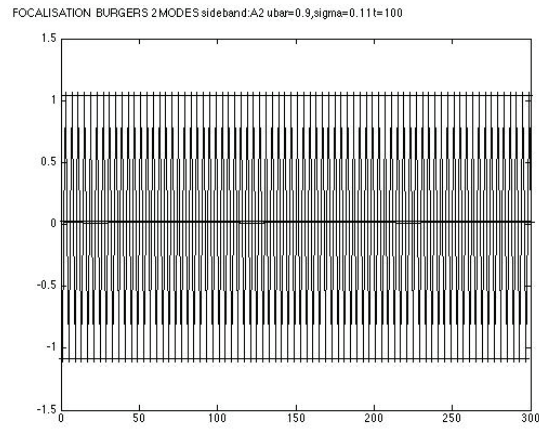


(b)

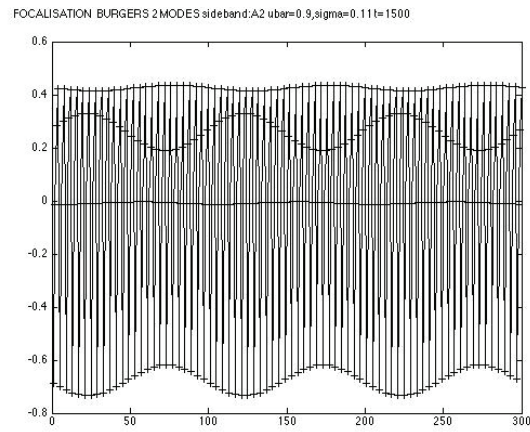


(c)

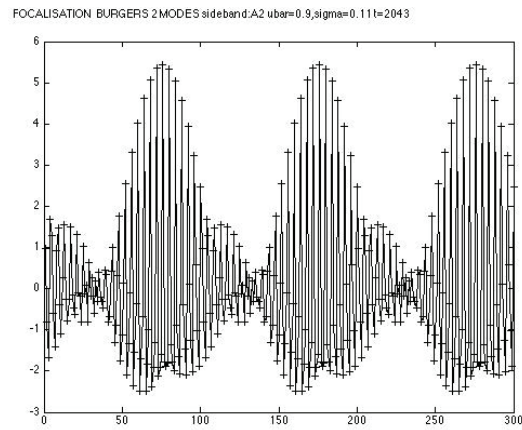
FIGURE 2.7 – Transformée de Fourier de u ,
 $\bar{u} = 0.625, \sigma = 0.23, J = 300, \delta = 3, \mu = 0.000005, t = 100, 1800, 2223$



(a)

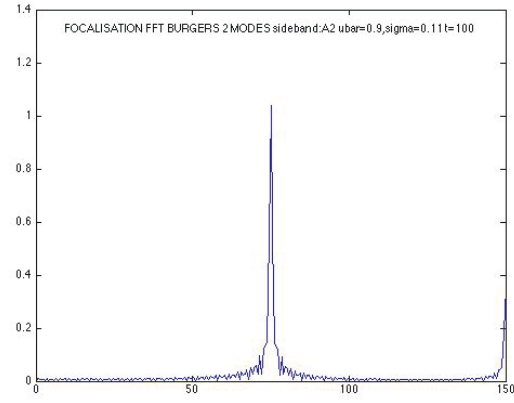


(b)

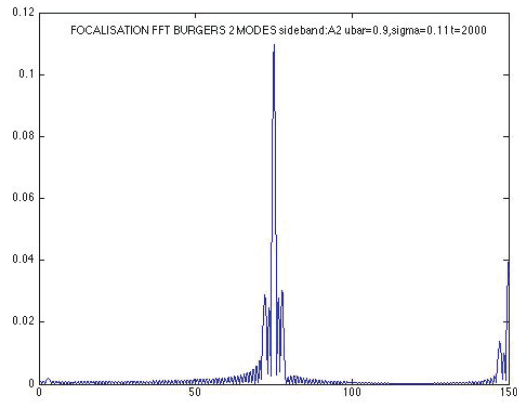


(c)

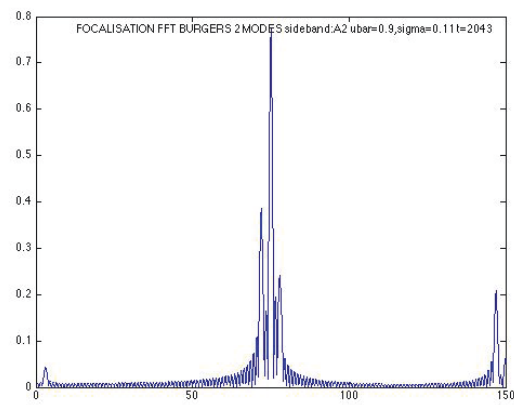
FIGURE 2.8 – Solution du mode 2,
 $\bar{u} = 0.9, \sigma = 0.11, J = 300, \delta = 3, \mu = 0.000005, t = 100, 1500, 2043$



(a)



(b)



(c)

FIGURE 2.9 – Transformée de Fourier de u ,
 $\bar{u} = 0.9, \sigma = 0.11, J = 300, \delta = 3, \mu = 0.000005, t = 100, 1500, 2043$

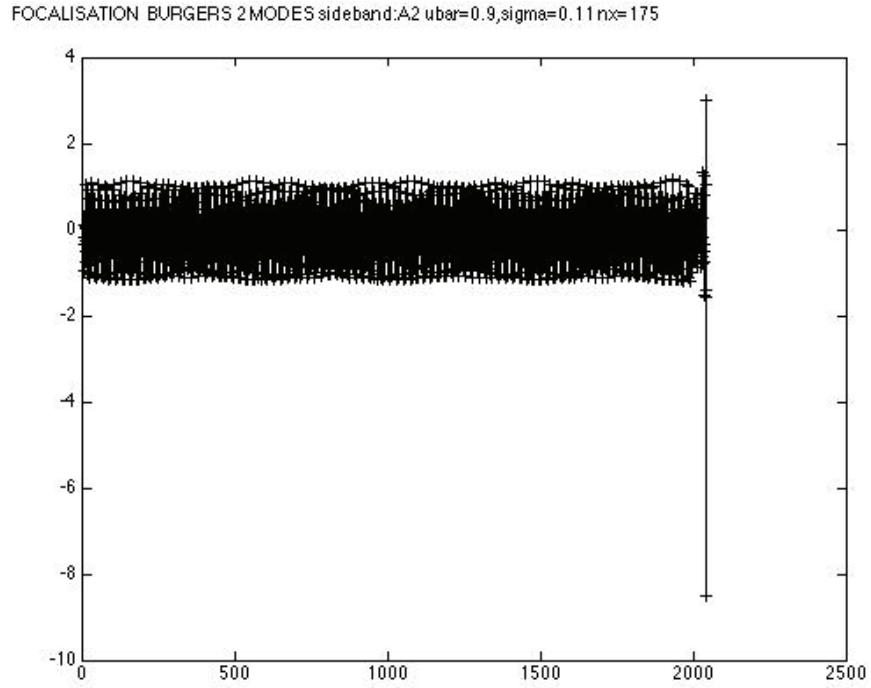


FIGURE 2.10 – Solution du mode 2, $u(t)$,
 $\bar{u} = 0.9, \sigma = 0.11, J = 122, \delta = 3, \mu = 0.000005$

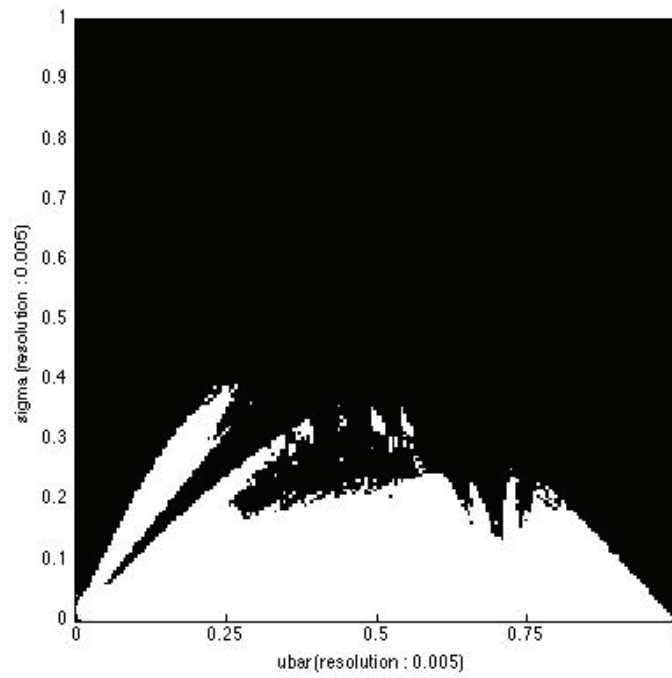


FIGURE 2.11 – Carte de stabilité avec sideband pour 2 modes,
 $\bar{u} = [0, 1], \sigma = [0, 1], \mu = 0.000005, J = 300, \delta = 3, \mu = 0.000005, t = 2000$

2.5 Analyse de la focalisation

On reprendra en les complétant, les principaux résultats de [8], pour tenter de comprendre le mécanisme de focalisation par différentes méthodes :

On considère la solution de l'équation de Burgers discrétisée en espace (2.45) avec le nombre d'onde fondamental $K = 2\pi/3h$ pour la solution résonante à 1 mode, (on représentera les dérivées temporelles par un $\dot{}$) :

$$\dot{u}_t + \frac{1}{2h}(u_j + \bar{u})(u_{j+1} - u_{j-1}) \quad (2.45)$$

On suppose que la solution est perturbée comme précédemment par la présence de composantes de sideband (2.44) de la forme :

$$A_2(t)e^{i(k+\mu)x} + A_2^*(t)e^{-i(k+\mu)x} \quad (2.46)$$

L'analyse de toutes les interactions possibles, tableau 2.1, entre le terme fondamental et les composantes de sideband précédentes, montre que l'ensemble des solutions est de la forme :

$$u_j = A_0(t)e^{ikj} + A_1(t)e^{i(k-\mu)j} + A_2(t)e^{i(k+\mu)j} + b(t)e^{i\mu j} + c.c. \quad (2.47)$$

	$A_0 e^{ikj}$	$A_0^* e^{-ikj}$	$A_2 e^{i(k+\mu)j}$	$A_2^* e^{-i(k+\mu)j}$
$A_0 e^{ikj}$	$A_0 A_0 e^{-ikj}$	$A_0 A_0^*$	$A_0 A_2 e^{-i(k-\mu)j}$	$A_0 A_2^* e^{-i\mu j}$
$A_0^* e^{-ikj}$	$A_0 A_0^*$	$A_0^* A_0^* e^{ikj}$	$A_0^* A_2 e^{i\mu j}$	$A_0^* A_2^* e^{i(k-\mu)j}$
$A_2 e^{i(k+\mu)j}$	$A_2 A_0 e^{-i(k-\mu)j}$	$A_2 A_0^* e^{i\mu j}$	$A_2 A_2 e^{2i(k+\mu)j}$	$A_2 A_2^*$
$A_2^* e^{-i(k+\mu)j}$	$A_2^* A_0 e^{-i\mu j}$	$A_2^* A_0^* e^{i(k-\mu)j}$	$A_2 A_2^*$	$A_2^* A_2^* e^{-2i(k+\mu)j}$

TABLE 2.1 – Tableau des différents produits croisés introduits par les non linéarités quadratiques

On prend en compte le fait que le produit $e^{i\frac{2\pi}{3}} e^{i\frac{2\pi}{3}}$ vaut $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$, le produit $e^{-i\frac{2\pi}{3}} e^{-i\frac{2\pi}{3}} e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et que les carrés de A_2 et A_2^* sont considérés comme négligeables.

On nommera A_1 l'amplitude du sideband inférieur $e^{i(k-\mu)j}$ et b l'amplitude de $e^{i\mu j}$.

En reportant la valeur de u_j de l'équation (2.47) dans l'équation semi-discrétisée (2.45) et en égalant les différents termes en :

$$e^{ikj}, e^{i(k-\mu)j}, e^{i(k+\mu)j}, e^{i\mu j} + c.c. \quad (2.49)$$

on obtient le système différentiel suivant, en $A_1(t), A_2(t), b(t)$:

$$\dot{A}_1 + iF(\mu)A_1 + i(P(\mu)A_0 b^* - M(\mu)A_0^* A_2^*) = 0 \quad (2.50)$$

$$\dot{A}_2 + iF(-\mu)A_2 + i(P(-\mu)A_0 b - M(-\mu)A_0^* A_1^*) = 0 \quad (2.51)$$

$$\dot{b} + iL(\mu)b + i(N(\mu)A_0 A_1^* - N(-\mu)A_0^* A_2) = 0 \quad (2.52)$$

où :

$$F(\mu) = \frac{\bar{u}}{2h}(\sqrt{3} \cos \mu + \sin \mu) \quad (2.53)$$

$$M(\mu) = \frac{1}{2h}(\sqrt{3} + \sqrt{3} \cos \mu - \sin \mu) \quad (2.54)$$

$$P(\mu) = \frac{1}{2h}(\sqrt{3} - 2 \sin \mu) \quad (2.55)$$

$$N(\mu) = \frac{1}{2h}(\sqrt{3} - \sqrt{3} \cos \mu - \sin \mu) \quad (2.56)$$

$$L(\mu) = \frac{\bar{u}}{h}(\sin \mu) \quad (2.57)$$

Nous tenterons d'exprimer la croissance des modes de sideband, en simplifiant les expressions de (2.50).

2.5.1 Méthode simplifiée

On pose les 2 simplifications suivantes :

1. On ne considère que la partie linéaire de $A_0(t)$ dans l'équation (2.17). Soit :

$$A_0(t) = a_0 e^{i\omega t}, \text{ avec } \omega = \sqrt{3} \frac{\bar{u}}{2h} \quad (2.58)$$

2. On pose $b(t) = 0$.

L'équation (2.50) se simplifie et peut se résoudre simplement :

$$\dot{A}_1 + iF(\mu)A_1 - iM(\mu)a_0^* A_2^* e^{i\omega t} = 0 \quad (2.59)$$

$$\dot{A}_2 + iF(-\mu)A_2 - iM(-\mu)a_0^* A_1^* e^{i\omega t} = 0 \quad (2.60)$$

On élimine un des 2 paramètres A_1 ou A_2 entre les 2 équations pour aboutir à des solutions de la forme :

$$A_{1,2}(t) = a_{1,2} e^{i\lambda t} \quad (2.61)$$

La solution est croissante, donc instable, si le discriminant suivant de l'équation quadratique, à laquelle on a abouti est négatif soit :

$$(3 - 4\alpha^2)\cos^2 \mu + (3 - 6\alpha^2)\cos \mu + \frac{1}{4}(3 - 8\alpha^2) < 0, \text{ avec } \alpha = \frac{|A_0|}{\bar{u}} \quad (2.62)$$

Il a été montré par [8] que $\alpha < 1/2$ dans la zone stable et que $\mu = 2\pi\delta/J < \pi/2$ pour $\delta = 3$ et $J > 12$ entraîne $\cos \mu > 0$. Tous les termes de l'équation quadratique sont positifs.

Dans la description précédente, avec les simplifications présentées, en particulier $b(t) = 0$, le système semi-discret ne permet pas la croissance des modes de sideband.

On voit dans le tableau 2.1 que les facteurs de e^μ sont du même ordre que ceux de $e^{(k-\mu)j}$ ou $e^{(k+\mu)j}$, à savoir $A_0 A_{1,2}$. La simplification $b(t) = 0$ est elle justifiée ?

La méthode suivante, utilisant les échelles multiples, tente d'y répondre.

2.5.2 Analyse de l'équation continue vis à vis des modes de sideband par la méthode des échelles multiples

Pour justifier l'intérêt de cette méthode nous allons tout d'abord examiner de plus près la nature de la solution (2.47) recherchée, en ignorant le coefficient $b(t)$.

Pour une valeur de t donnée la solution s'exprime par :

$$u_j(t) = 2\mathcal{R}(e^{ikj}(A_0(t) + A_1(t)e^{-i\mu j} + A_2(t)e^{i\mu j})) \quad (2.63)$$

En posant $A_0 = X + iY$, on peut réécrire l'équation précédente sous la forme :

$$u_j(t) = 2((X + \mathcal{F}(j)) \cos(\frac{2\pi}{3}) - (Y + \mathcal{G}(j)) \sin(\frac{2\pi}{3})) \quad (2.64)$$

Les termes $\mathcal{F}(j)$ et $\mathcal{G}(j)$ sont des combinaisons de $\cos \mu j$, de $\sin \mu j$ et donc des fonctions périodiques de période $1/\delta$. On voit que l'introduction des modes de sideband amène une modulation de l'enveloppe qui nous justifie l'introduction d'un temps court et d'un temps long.

Nous détaillerons un peu plus cette méthode moins brutale en simplifications que la précédente. Pour ce faire nous allons dans le système d'équation (2.53) faire tendre h vers 0.

On peut alors écrire :

$$\text{pour } \mu = 2\pi\delta h \quad (2.65)$$

$$\cos \mu = 1 - O(\mu^2) \quad (2.66)$$

$$\sin \mu = \mu - O(\mu^3) = 2\pi\delta h - O(\mu^3) \quad (2.67)$$

Les expressions de l'équation (2.53) s'expriment alors ainsi pour $h \rightarrow 0$:

$$F(\mu) \rightarrow \frac{\bar{u}}{2h}(\sqrt{3} + 2\pi\delta h) \rightarrow \sqrt{3} \frac{\bar{u}}{2h} \quad (2.68)$$

$$M(\mu) \rightarrow \frac{1}{2h}(\sqrt{3} + \sqrt{3} - 2\pi\delta h) \rightarrow \sqrt{3} \frac{1}{h} \quad (2.69)$$

$$P(\mu) \rightarrow \frac{1}{2h}(\sqrt{3} - 4\pi\delta h) \rightarrow \sqrt{3} \frac{1}{2h} \quad (2.70)$$

$$N(\mu) \rightarrow \frac{1}{2h}(\sqrt{3} - \sqrt{3} - 2\pi\delta h) \rightarrow -\pi\delta \quad (2.71)$$

$$L(\mu) \rightarrow \frac{\bar{u}}{h}(2\pi\delta h) \rightarrow 2\pi\bar{u}\delta \quad (2.72)$$

On reprend l'hypothèse précédente :

$$A_0(t) = a_0 e^{i\omega t} \quad (2.73)$$

$$\text{avec } \omega = \sqrt{3} \frac{\bar{u}}{2h} \quad (2.74)$$

On pose $\alpha_0 = a_0/\bar{u}$ et $\Omega = \pi\bar{u}\delta$. On obtient le nouveau système :

$$\dot{A}_1 + i\omega A_1 + i\omega(\alpha_0 b^* e^{-i\omega t} - 2\alpha_0^* A_2^* e^{i\omega t}) = 0 \quad (2.75)$$

$$\dot{A}_2 + i\omega A_2 + i\omega(\alpha_0 b e^{-i\omega t} - 2\alpha_0^* A_1^* e^{i\omega t}) = 0 \quad (2.76)$$

$$\dot{b} + 2i\Omega b - i\Omega(\alpha_0^* A_2 e^{i\omega t} + \alpha_0 A_1^* e^{-i\omega t}) = 0 \quad (2.77)$$

Puisque $\omega \gg 1$, on peut introduire un temps rapide $T = \omega t$ et un temps lent $\tau = \Omega t$. On peut, avec cette décomposition temporelle, écrire la dérivée par rapport au temps sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} = \omega \frac{\partial}{\partial T} + \Omega \frac{\partial}{\partial \tau} \quad (2.78)$$

On pose :

$$\epsilon = \frac{\Omega}{\omega} \quad (2.79)$$

$$(2.80)$$

On décompose les amplitudes :

$$A_1 = A_1^0(T, \tau) + O(\epsilon) \quad (2.81)$$

$$A_2 = A_2^0(T, \tau) + O(\epsilon) \quad (2.82)$$

$$b = b_0(T, \tau) + O(\epsilon) \quad (2.83)$$

En portant les expressions précédentes dans les équations (2.75) et en égalant les termes en ϵ^0 , le système (2.75) au premier ordre devient :

$$\frac{\partial}{\partial T} A_1^0 + iA_1^0 + i(\alpha_0 b_0^* e^{-iT} - 2\alpha_0^* A_2^{0*} e^{iT}) = 0 \quad (2.84)$$

$$\frac{\partial}{\partial T} A_2^0 + iA_2^0 + i(\alpha_0 b_0 e^{-iT} - 2\alpha_0^* A_1^{0*} e^{iT}) = 0 \quad (2.85)$$

$$\frac{\partial}{\partial T} b_0 = 0 \quad (2.86)$$

On peut résoudre le système différentiel précédent par rapport au temps T . On obtient le résultat suivant (Annexe B) :

$$A_1^0(T, \tau) = C_1(\tau) e^{i\lambda_1 T} + C_2(\tau) e^{i\lambda_2 T} + \frac{3\alpha_0 b_0^*}{4|\alpha_0|^2} e^{-iT} + \frac{\alpha_0^* b_0^*}{2\alpha_0} e^{2iT} \quad (2.87)$$

$$A_2^0(T, \tau) = \frac{(1 + \lambda_1)}{2\alpha_0} C_1^*(\tau) e^{i\lambda_2 T} + \frac{(1 + \lambda_2)}{2\alpha_0} C_2^*(\tau) e^{i\lambda_1 T} + \frac{3\alpha_0 b_0}{4|\alpha_0|^2} e^{-iT} + \frac{\alpha_0^* b_0}{2\alpha_0} e^{2iT}$$

$$b_0(T, \tau) = b_0(\tau)$$

avec :

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} [1 \pm (9 - 16|\alpha_0|^2)^{1/2}] \quad (2.88)$$

On considère les mêmes conditions initiales sur A_0 et sur les amplitudes des modes de sideband A_1 et A_2 soit :

$$A_0(0) = a_0 = \sigma(1 + i) \quad (2.89)$$

$$\text{donc } \alpha_0 = \frac{\sigma * (1 + i)}{\bar{u}}$$

$$A_1^0(0, 0) = 0$$

$$A_2^0(0, 0) = \zeta(1 + i) \text{ avec } \zeta = 0.000005$$

$$b_0(0) = 0$$

En portant ces conditions initiales (2.89) dans le système (2.87), on obtient les conditions initiales sur $C_1(0)$ et $C_2(0)$ soit :

$$C_1(0) + C_2(0) = 0 \quad (2.90)$$

$$(1 + \lambda_1)C_1^*(0) + (1 + \lambda_2)C_2^*(0) = 2 \frac{\zeta\sigma(1 + i)^2}{\bar{u}} = 4i \frac{\zeta\sigma}{\bar{u}} \quad (2.91)$$

On résoud ce système :

$$C_2(0) = -C_1(0) \quad (2.92)$$

$$C_1^*(0) = \frac{4\zeta\sigma}{\bar{u}(\lambda_1 - \lambda_2)} = \frac{4\zeta\sigma}{\bar{u}[(9 - 16|\alpha_0|^2)^{1/2}]} \quad (2.93)$$

Le système (2.75) au deuxième ordre s'écrit (Annexe B) :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} A_1^0(T, \tau) = 0 \text{ donc } A_1^0(T, \tau) = A_1^0(T) \quad (2.94)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} A_2^0(T, \tau) = 0 \text{ donc } A_2^0(T, \tau) = A_2^0(T) \quad (2.95)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} b^0(\tau) + 2ib^0(\tau) = i(\alpha_0^* A_2^0(T) e^{iT} + \alpha_0 A_1^{0*}(T) e^{-iT}) \quad (2.96)$$

Comme b^0 ne dépend pas de T , et $A_1^0(T)$ et $A_2^0(T)$ ne dépendent que de T , on rend le terme séculaire du second membre égal à une constante :

$$i(\alpha_0^* A_2^0(T) e^{iT} + \alpha_0 A_1^{0*}(T) e^{-iT}) = \text{constante} \quad (2.97)$$

Cette constante qui ne dépend donc ni de T ni de τ peut donc être définie par les valeurs initiales de $T = 0$. Soit :

$$\text{constante} = i\alpha_0^* \zeta(1 + i) = i \frac{\sigma(1 - i)}{\bar{u}} \zeta(1 + i) = 2i \frac{\sigma\zeta}{\bar{u}} \quad (2.98)$$

La dernière équation différentielle en b^0 s'écrit alors :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} b^0(\tau) + 2ib^0(\tau) = 2i \frac{\sigma\zeta}{\bar{u}} \quad (2.99)$$

Sa résolution simple donne :

$$b^0(\tau) = \frac{\sigma\zeta}{\bar{u}}(1 - e^{-2i\tau}) \quad (2.100)$$

On voit que la variation lente de b est une variation périodique de la variable τ de période $\pi/\Omega = 1/\mu\bar{u}$.

Poursuivons le calcul des 2 premières équations de (2.94) :

$$\frac{\partial}{\partial\tau}C_1(\tau)e^{i\lambda_1T} + \frac{\partial}{\partial\tau}C_2(\tau)e^{i\lambda_2T} + \left[\frac{3\alpha_0}{4|\alpha_0|^2}e^{-iT} + \frac{\alpha_0^*}{2\alpha_0}e^{2iT}\right]\frac{\partial}{\partial\tau}b_0^*(\tau) = 0 \quad (2.101)$$

$$\frac{1+\lambda_1}{2\alpha_0}\frac{\partial}{\partial\tau}C_1^*(\tau)e^{i\lambda_2T} + \frac{1+\lambda_2}{2\alpha_0}\frac{\partial}{\partial\tau}C_2^*(\tau)e^{i\lambda_1T} + \left[\frac{3\alpha_0}{4|\alpha_0|^2}e^{-iT} + \frac{\alpha_0^*}{2\alpha_0}e^{2iT}\right]\frac{\partial}{\partial\tau}b_0(\tau) = 0 \quad (2.102)$$

On remplace les dérivées de $b_0(\tau), b_0^*(\tau)$ par rapport à τ dans les équations de (2.101) :

$$\frac{\partial}{\partial\tau}b_0(\tau) = 2i\frac{\sigma\zeta}{\bar{u}}e^{-2i\tau} \quad (2.103)$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}b_0^*(\tau) = -2i\frac{\sigma\zeta}{\bar{u}}e^{2i\tau} \quad (2.104)$$

On élimine entre les 2 équations le terme commun :

$$\left[\frac{3\alpha_0}{4|\alpha_0|^2}e^{-iT} + \frac{\alpha_0^*}{2\alpha_0}e^{2iT}\right] \quad (2.105)$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} -i\left[\frac{\partial}{\partial\tau}C_1(\tau)e^{i\lambda_1T} + \frac{\partial}{\partial\tau}C_2(\tau)e^{i\lambda_2T}\right](e^{-2i\tau}) = \\ i\left[\left(\frac{1+\lambda_1}{2\alpha_0}\right)\frac{\partial}{\partial\tau}C_1^*(\tau)e^{i\lambda_2T} + \left(\frac{1+\lambda_2}{2\alpha_0}\right)\frac{\partial}{\partial\tau}C_2^*(\tau)e^{i\lambda_1T}\right](e^{2i\tau}) \end{aligned} \quad (2.106)$$

On regroupe ensemble, pour les éliminer les termes séculaires en λ_1 et λ_2 .

$$e^{i\lambda_1T}\left[\frac{\partial C_1(\tau)}{\partial\tau}e^{-2i\tau} + \left(\frac{1+\lambda_2}{2\alpha_0}\right)\frac{\partial C_2^*(\tau)}{\partial\tau}e^{2i\tau}\right] = 0 \quad (2.107)$$

$$e^{i\lambda_2T}\left[\frac{\partial C_2(\tau)}{\partial\tau}e^{-2i\tau} + \left(\frac{1+\lambda_1}{2\alpha_0}\right)\frac{\partial C_1^*(\tau)}{\partial\tau}e^{2i\tau}\right] = 0 \quad (2.108)$$

On résoud et on retrouve les résultats du système (2.92) :

$$C_1(\tau) = \text{constante} = C_1(0) \quad (2.109)$$

$$C_2(\tau) = \text{constante} = C_2(0) \quad (2.110)$$

On peut, connaissant l'ensemble des fonctions $A^0(T), A^1(T, \tau), A^2(T, \tau), b(\tau)$, tracer la variation de $A_2^0(t)$ et de $b_0(t)$, en fonction de σ, \bar{u}, μ :

$$A_1^0(T, \tau) = C_1(0)e^{i\lambda_1 T} + C_2(0)e^{i\lambda_2 T} + \left[\frac{3\alpha_0}{4|\alpha_0|^2}e^{-iT} + \frac{\alpha_0^*}{2\alpha_0}e^{2iT} \right] \frac{\sigma\zeta}{\bar{u}}(1 - e^{2i\tau}) \quad (2.111a)$$

$$A_2^0(T, \tau) = \frac{(1 + \lambda_1)}{2\alpha_0} C_1^*(0)e^{i\lambda_1 T} + \frac{(1 + \lambda_2)}{2\alpha_0} C_2^*(0)e^{i\lambda_2 T} + \left[\frac{3\alpha_0}{4|\alpha_0|^2}e^{-iT} + \frac{\alpha_0^*}{2\alpha_0}e^{2iT} \right] \frac{\sigma\zeta}{\bar{u}}(1 - e^{-2i\tau}) \quad (2.111b)$$

$$b_0(\tau) = \frac{\sigma\zeta}{\bar{u}}(1 - e^{-2i\tau}) \quad (2.111c)$$

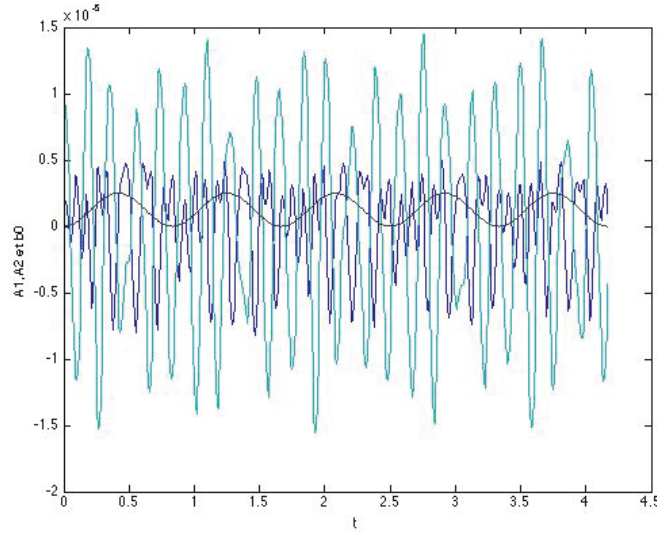


FIGURE 2.12 – Partie réelle de $A_1^0(t)$ (bleu), $A_2^0(t)$ (vert) et de $b(t)$ (noir) en fonction de t , $\bar{u} = 0.4, \sigma = 0.1, J = 120, \delta = 3, \mu = 0.000005$

La première figure (2.13) montre la variation de la partie réelle de $A_2^0(t)$ et de $b_0(t)$ pour $\bar{u} = 0.9, \sigma = 0.2$.

La seconde figure (2.14) montre la variation de la partie réelle de $A_2^0(t)$ et de $b_0(t)$ pour $\bar{u} = 0.9, \sigma = 0.4775$.

Ces figures, complétant les analyse précédentes, confirment que :

- les solutions sont stables avec ou sans modes de sideband tant que l'initialisation reste à l'intérieur du triangle de stabilité figure (2.13) et annexe D.
- les solutions deviennent "normalement" instables avec ou sans modes de sideband quand l'initialisation franchit la frontière de cette zone de stabilité (2.14) et annexe D.

Le phénomène de focalisation provient donc de la discrétisation en temps de l'équation différentielle. Nous le vérifierons dans le paragraphe suivant.

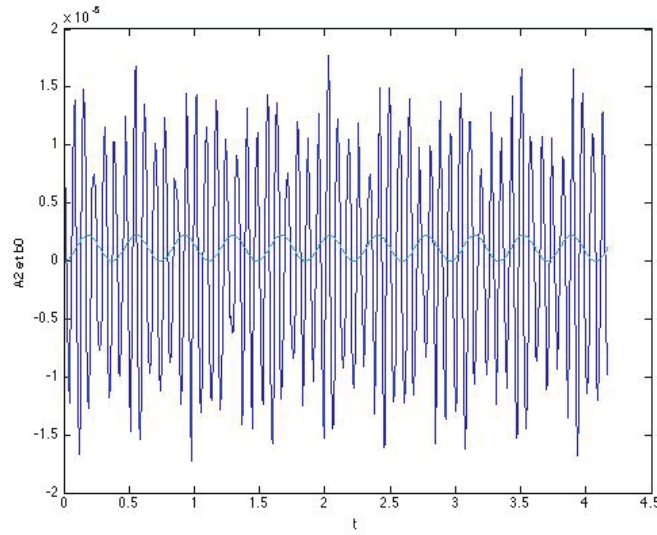


FIGURE 2.13 – Partie réelle de $A_2^0(t)$ et de $b_0(t)$ en fonction du temps, $\bar{u} = 0.9, \sigma = 0.2, J = 120, \delta = 3, \mu = 0.000005$

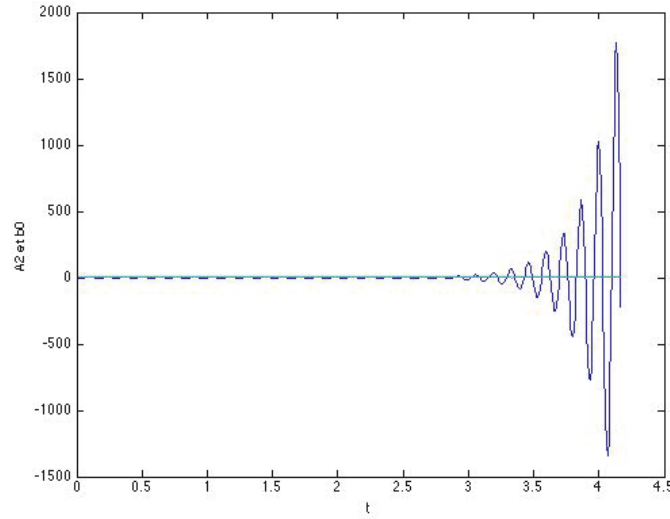


FIGURE 2.14 – Partie réelle de $A_2^0(t)$ et de $b_0(t)$, $\bar{u} = 0.9, \sigma = 0.4775, J = 120, \delta = 3, \mu = 0.000005$

2.5.3 Analyse des équations discrétisées en temps par le schéma leapfrog

On repartira [8] des équations suivantes dont on va discrétiser les dérivées temporelles :

$$\dot{A}_1 + iF(\mu)A_1 + i(P(\mu)A_0b^* - M(\mu)A_0^*A_2^*) = 0 \quad (2.112)$$

$$\dot{A}_2 + iF(-\mu)A_2 + i(P(-\mu)A_0b - M(-\mu)A_0^*A_1^*) = 0 \quad (2.113)$$

$$\dot{b} + iL(\mu)b + i(N(\mu)A_0A_1^* - N(-\mu)A_0^*A_2) = 0 \quad (2.114)$$

Avec :

$$F(\mu) = \frac{\bar{u}}{2h}(\sqrt{3}\cos\mu + \sin\mu) \quad (2.115)$$

$$M(\mu) = \frac{1}{2h}(\sqrt{3} + \sqrt{3}\cos\mu - \sin\mu) \quad (2.116)$$

$$P(\mu) = \frac{1}{2h}(\sqrt{3} - 2\sin\mu) \quad (2.117)$$

$$N(\mu) = \frac{1}{2h}(\sqrt{3} - \sqrt{3}\cos\mu - \sin\mu) \quad (2.118)$$

$$L(\mu) = \frac{\bar{u}}{h}(\sin\mu) \quad (2.119)$$

On simplifiera comme précédemment en prenant $b(t) = 0$. On écrira les dérivées temporelles discrétisées :

$$\dot{A}_j(m) = \frac{A_j(m+1) - A_j(m-1)}{2k} \quad (2.120)$$

$$\text{opérateur qu'on notera : } \Delta A_j(m) \quad (2.121)$$

Comme précédemment, on prendra pour $A_0(m)$, seulement la partie linéaire $A_0(m) = a_0 e^{-\phi m}$ mais avec, pour la discrétisation leapfrog, $\phi = \phi_{1,2}$ de l'équation (2.9).

Soit avec $p = N/3$:

$$\phi_{1,2} = \arctan \left\{ \frac{\beta \sin(2\pi/3)}{\pm \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2(2\pi/3)}} \right\} \quad (2.122)$$

Avec ces simplifications le système devient :

$$\Delta A_1(m) + iF(\mu)A_1(m) - iM(\mu)a_0^* e^{\phi m} A_2^*(m) = 0 \quad (2.123)$$

$$\Delta A_2(m) + iF(-\mu)A_2(m) - iM(-\mu)a_0^* e^{\phi m} A_1^*(m) = 0 \quad (2.124)$$

Nous allons écrire une identité sur $\Delta[e^{\phi m} A_2^*(m)]$, qui permettra de résoudre le système (2.123).

$$2k\Delta(e^{\phi m} A_2^*(m)) = e^{\phi(m+1)} A_2^*(m+1) - e^{\phi(m-1)} A_2^*(m-1) \quad (2.125)$$

$$= e^{\phi m} (e^{\phi} A_2^*(m+1) - e^{-\phi} A_2^*(m-1)) \quad (2.126)$$

$$= e^{\phi m} [\cos\phi(A_2^*(m+1) - A_2^*(m-1)) + \sin\phi(A_2^*(m+1) + A_2^*(m-1))] \quad (2.127)$$

On simplifiera la somme $A_2^*(m+1) + A_2^*(m-1)$ en prenant la moyenne :

$$A_2^*(m+1) + A_2^*(m-1) = 2A_2^*(m) \quad (2.128)$$

L'identité s'écrira alors :

$$\Delta[e^{\phi m} A_2^*(m)] = e^{\phi m} [\cos\phi \Delta A_2^*(m) + \frac{i}{k} \sin\phi A_2^*(m)] \quad (2.129)$$

Appliquons l'opérateur Δ sur la première équation de (2.123) :

$$\Delta^2 A_1(m) + iF(\mu)\Delta A_1(m) - iM(\mu)a_0^* \Delta[e^{\phi m} A_2^*(m)] = 0 \quad (2.130)$$

On utilise l'identité pour $\Delta[e^{\phi m} A_2^*(m)]$.

$$\begin{aligned} \Delta^2 A_1(m) + iF(\mu)\Delta A_1(m) \\ - iM(\mu)a_0^* \cos \phi e^{\phi m} \Delta A_2^*(m) + \frac{1}{k} M(\mu)a_0^* e^{\phi m} \sin \phi A_2^*(m) = 0 \end{aligned} \quad (2.131)$$

On conjugue la seconde équation de (2.123) et on la multiplie par $e^{\phi m}$:

$$e^{\phi m} \Delta A_2^*(m) = iF(-\mu)e^{\phi m} A_2^*(m) - iM(-\mu)a_0 A_1(m) \quad (2.132)$$

On remplace $e^{\phi m} \Delta A_2^*(m)$ dans l'équation (2.131) :

$$\Delta^2 A_1(m) + iF(\mu)\Delta A_1(m) - iM(\mu)a_0^* \cos \phi [iF(-\mu)e^{\phi m} A_2^*(m) \quad (2.133)$$

$$- iM(-\mu)a_0 A_1(m)] + \frac{1}{k} M(\mu)a_0^* e^{\phi m} \sin \phi A_2^*(m) = 0$$

$$\Delta^2 A_1(m) + iF(\mu)\Delta A_1(m) \quad (2.134)$$

$$\begin{aligned} + [M(\mu)F(-\mu)a_0^* \cos \phi + \frac{1}{k} M(\mu) \sin \phi a_0^*] e^{\phi m} A_2^*(m) \\ - M(-\mu)M(\mu) |a_0|^2 \cos \phi A_1(m) = 0 \end{aligned}$$

On remplace le terme $e^{\phi m} A_2^*(m)$ tiré de la première équation de (2.123) :

$$-i\Delta A_1(m) + F(\mu)A_1(m) = M(\mu)a_0^* e^{\phi m} A_2^*(m) \quad (2.135)$$

Il vient en final :

$$\begin{aligned} \Delta^2 A_1(m) + i\Delta A_1(m) [F(\mu) - F(-\mu) \cos \phi - \frac{1}{k} \sin \phi] - A_1(m) [\cos \phi M(\mu)M(-\mu) |a_0|^2 \\ - \frac{1}{k} \sin \phi F(\mu) - \cos \phi F(\mu)F(-\mu)] = 0 \end{aligned} \quad (2.136)$$

On appelle :

$$[F(\mu) - F(-\mu) \cos \phi - \frac{1}{k} \sin \phi] = \mathcal{B} \quad (2.137)$$

$$[\cos \phi M(\mu)M(-\mu) |a_0|^2 - \frac{1}{k} \sin \phi F(\mu) - \cos \phi F(\mu)F(-\mu)] = \mathcal{C} \quad (2.138)$$

$$\Delta^2 A_1(m) + i\mathcal{B}\Delta A_1(m) - \mathcal{C}A_1(m) = 0 \quad (2.139)$$

Réolvons cette équation en revenant à la définition de $\Delta A_1(m)$.

$$\Delta A_1(m) = \frac{1}{2k}(A_1(m+1) - A_1(m-1)) \quad (2.140)$$

$$\Delta\Delta A_1(m) = \frac{1}{4k^2}(\Delta A_1(m+1) - \Delta A_1(m-1)) \quad (2.141)$$

$$= \frac{1}{4k^2}(A_1(m+2) - 2A_1(m)) + A_1(m-2)) \quad (2.142)$$

On pose $A_1(m) = r^m$ et on remplace dans (2.139) ces différentes expressions :

$$\frac{1}{4k^2}(r^{m+2} - 2r^m + r^{m-2}) + \frac{i}{2k}\mathcal{B}(r^{m+1} - r^{m-1}) - \mathcal{C}r^m = 0 \quad (2.143)$$

L'équation finale dont on peut étudier les racines, après avoir posé $R = r - 1/r$ sera :

$$R^2 + 2ik\mathcal{B}R - 4k^2\mathcal{C} = 0 \quad (2.144)$$

Dans cette équation finale, "apparemment" simple, on doit maintenant, dans \mathcal{B} et \mathcal{C} remplacer $F(\mu)$, $F(-\mu)$, $M(\mu)$, $M(-\mu)$ par leurs valeurs respectives qu'on rappelle :

$$F(\mu) = \frac{\bar{u}}{2h}(\sqrt{3}\cos\mu + \sin\mu) \quad (2.145)$$

$$M(\mu) = \frac{1}{2h}(\sqrt{3} + \sqrt{3}\cos\mu - \sin\mu) \quad (2.146)$$

$$F(-\mu) = \frac{\bar{u}}{2h}(\sqrt{3}\cos\mu - \sin\mu) \quad (2.147)$$

$$M(-\mu) = \frac{1}{2h}(\sqrt{3} + \sqrt{3}\cos\mu + \sin\mu) \quad (2.148)$$

On utilisera les formules trigonométriques suivantes :

$$\cos(\arctan\phi) = \frac{1}{\sqrt{1+\phi^2}} \quad (2.149)$$

$$\sin(\arctan\phi) = \frac{\phi}{\sqrt{1+\phi^2}} \quad (2.150)$$

On prendra :

$$\gamma = \frac{k}{h} = 1, \beta = \frac{k\bar{u}}{h} = \bar{u} \quad (2.151)$$

On a :

$$\phi_{1,2} = \arctan \left[\frac{\beta \sin(2\pi/3)}{\pm \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2(2\pi/3)}} \right] \quad (2.152)$$

$$= \arctan \left[\frac{\beta\sqrt{3}}{\pm 2\sqrt{1 - 3/4\beta^2}} \right] \quad (2.153)$$

On posera :

$$q = \sqrt{1 - \frac{3}{4}\beta^2} \text{ et } \alpha = \frac{|a_0|}{\bar{u}} \quad (2.154)$$

On obtient :

$$\cos(\phi_1) = q, \cos(\phi_2) = -q \quad (2.155)$$

$$\sin(\phi_1) = \sin(\phi_2) = \frac{\bar{u}\sqrt{3}}{2} \quad (2.156)$$

En assemblant tous les morceaux on trouve pour $\phi = \phi_1$:

$$2k\mathcal{B} = \bar{u}[(1 - q)\sqrt{3}\cos\mu + (1 + q)\sin\mu - \sqrt{3}] \quad (2.157)$$

$$4k^2\mathcal{C} = -\bar{u}^2[3\cos\mu + \sqrt{3}\sin\mu + q(4\cos\mu^2 - 1 - \eta^2(2 + 6\cos\mu + 4\cos\mu^2))] \quad (2.158)$$

Pour $\phi = \phi_2$ on changera q en $-q$ dans les expressions précédentes.

Sloan et Mitchell montrent [8] que l'équation (2.144) présente, dans le triangle de stabilité (annexe D), pour $\phi = \phi_2$ des racines telles que $|r| > 1$, soit compte tenu de $A_1(m) = r^m$, une croissance des modes de sideband.

La discrétisation du temps suivant un schéma de leapfrog qui présente un mode parasite, entraîne la focalisation.

2.6 Stabilité d'un schéma numérique pour l'équation dissipative linéaire de Burgers

On peut également appliquer la méthode des ondes résonantes à l'équation de Burgers visqueuse adimensionnée linéaire :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.159)$$

Nous débuterons, pour cette équation dissipative, par l'étude de l'influence d'un schéma de discrétisation sur la stabilité[27]. On doit effectivement s'assurer que l'erreur due à la discrétisation n'est pas amplifiée par le schéma numérique. On utilisera les schémas de discrétisation suivants, en notant m le pas de temps, n le pas d'espace et $u(m, n)$ la vitesse discrétisée de $u(t, x)$, :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u(m+1, n) - u(m, n)}{\Delta t} \quad (2.160)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(m, n+1) - u(m, n-1)}{2\Delta x} \quad (2.161)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u(m, n+1) + u(m, n-1) - 2u(m, n)}{\Delta x^2} \quad (2.162)$$

La discrétisation de l'équation (2.159) s'écrit :

$$(u(m+1, n) - u(m, n)) + \frac{\bar{u}\Delta t}{2\Delta x}(u(m, n+1) - u(m, n-1)) - \frac{\eta\Delta t}{\Delta x^2}(u(m, n+1) + u(m, n-1) - 2u(m, n)) \quad (2.163)$$

On définit :

$$\alpha = \frac{\eta\Delta t}{\Delta x^2} \quad (2.164)$$

$$\beta = \frac{\bar{u}\Delta t}{\Delta x} \quad (2.165)$$

$$R = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\Delta x \bar{u}}{\eta} \text{ est équivalent à un nombre de reynolds de cellule.} \quad (2.166)$$

Le schéma numérique s'écrit :

$$u(m+1, n) = u(m, n-1)(\alpha + \frac{\beta}{2}) + u(m, n)(1 - 2\alpha) + u(m, n+1)(\alpha - \frac{\beta}{2}) \quad (2.167)$$

On obtient ainsi, le système linéaire, en appelant $a = (1 - 2\alpha)$, $b = (\alpha + \frac{\beta}{2})$, $c = (\alpha - \frac{\beta}{2})$, C , la matrice de transfert telle que :

$$u(m+1, n) = C_{m,n}u(m, n) \quad (2.168)$$

$$C = \begin{bmatrix} a & c & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b & a & c & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & c \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b & a \end{bmatrix} \quad (2.169)$$

Pour que le schéma numérique soit stable, il faut et il suffit que le rayon spectral $\rho(C)$ de la matrice C soit inférieur à 1. Les valeurs propres des matrices tridiagonales sont données dans [28] :

$$\lambda(C) = a + 2\sqrt{bc} \cos \frac{k\pi}{N+1} = 1 - 2\alpha + 2\alpha\sqrt{1 - \frac{R^2}{4}} \cos \frac{k\pi}{N+1} \quad (2.170)$$

Pour $R < 2$, les valeurs propres sont réelles, le rayon spectral est :

$$\rho(C) = -1 + 2\alpha + 2\alpha\sqrt{1 - \frac{R^2}{4}} < 1 \text{ pour } \alpha < \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{R^2}{4}}} \quad (2.171)$$

Pour $R > 2$, les valeurs propres sont complexes, le rayon spectral est :

$$\rho(C) = \sqrt{1 - 2\alpha^2 + 4\alpha^2(1 - \frac{R^2}{4})} < 1 \text{ pour } \alpha \frac{R^2}{4} < 1 \quad (2.172)$$

Calculons les 2 fonctions $R(\sigma) = 0$: Pour $R < 2$:

$$\alpha = \frac{\beta}{R} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{R^2}{4}}} \quad (2.173)$$

$$\text{Soit la fonction : } R = \frac{8\beta}{(4 + \beta^2)} \quad (2.174)$$

Pour $R > 2$:

$$\beta \frac{R^2}{4} = \frac{\beta}{R} \frac{R^2}{4} = 1 \quad (2.175)$$

$$\text{Soit la fonction : } R = \frac{4}{\beta} \quad (2.176)$$

Ces 2 fonctions sont égales à 2 pour $\beta = 2$:

La figure (2.15) montre la zone de stabilité pour R fonction de σ .

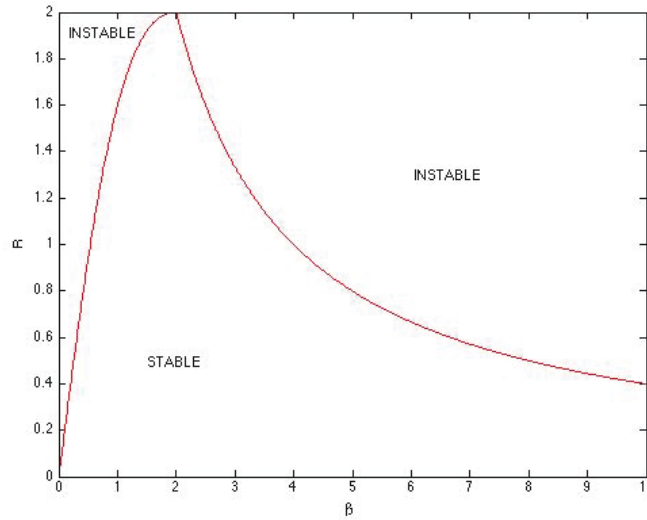


FIGURE 2.15 – Zone de stabilité fonction de R et β

Nous avons, pour 1 mode et 2 modes résonants établi les cartes d'instabilité de l'équation de Burgers dissipative (2.16), respectivement (2.17) (que l'on ne trouve pas dans les publications précédemment évoquées [7, 8, 9, 10, 11, 12]).

Les commentaires suivants peuvent être faits :

- Pour 1 mode résonant jusqu'à $\bar{u} = 0.5$, la figure reste identique avec une pente constante jusqu'à la même valeur de l'amplitude d'initialisation $\sigma = 0.125$, après cette valeur la prise en compte d'une viscosité introduit des instabilités importantes.
- Pour 2 modes résonants, et pour la même viscosité que pour 1 mode, la figure est globalement réduite d'un facteur 2. Une sorte de peigne de dents stables et instables se mettant en place dans la zone jusqu'à $\bar{u} = 0.5$.

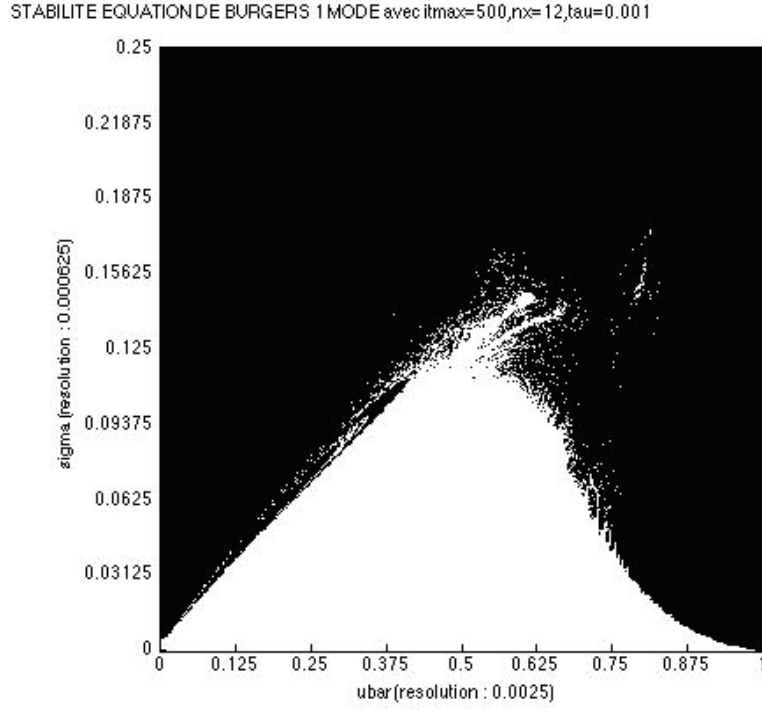


FIGURE 2.16 – Influence de la viscosité pour 1 mode,
 $\bar{u} = [0, 1], \sigma = [0, 0.25], \tau = 0.001, J = 12, t = 500$

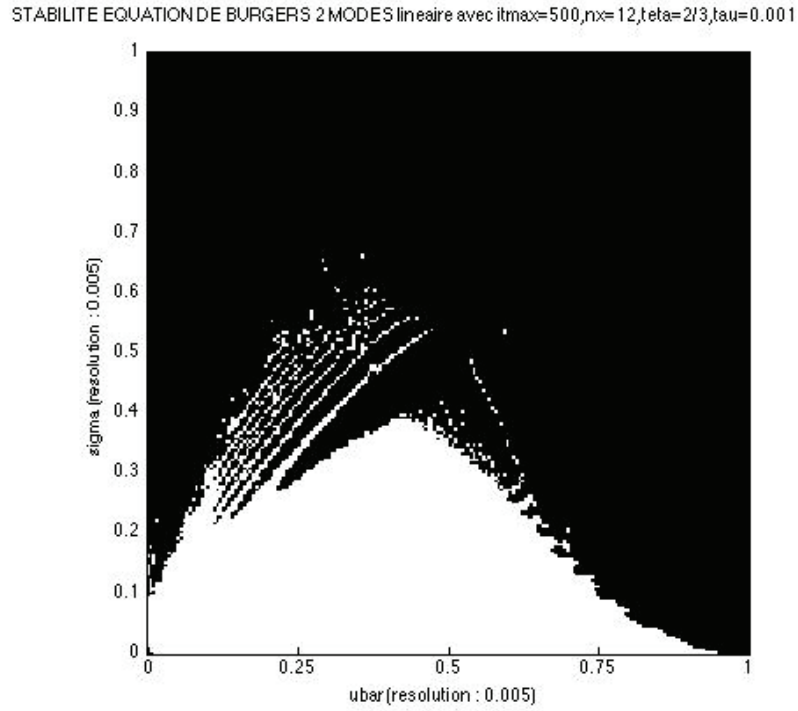


FIGURE 2.17 – Influence de la viscosité pour 2 modes,
 $\bar{u} = [0, 1], \sigma = [0, 1], \tau = 0.001, J = 12, t = 500$

Méthode de Boltzmann sur réseau

L'objet principal de ce chapitre est d'écrire les équations de Boltzmann à 1 dimension et de montrer leur équivalence à l'ordre retenu, aux équations de Navier Stokes. Nous aboutirons en fin de chapitre aux équations non linéaires à vitesses discrètes qui " subiront " le traitement des ondes résonantes au chapitre suivant

Nous rappelons, d'abord l'origine de l'équation de Boltzmann. L'annexe C en tente une modeste démonstration.

3.1 Equation de Boltzmann

L. Boltzmann a proposé en 1872 [29] une équation cinétique décrivant l'évolution des gaz dilués. Nous décrirons progressivement cette équation car :

- Elle reste la base toujours actuelle de la méthode de Boltzmann sur réseau.
- La connaissance des différentes hypothèses, sur lesquelles elle s'appuie, nous paraît importante.
- Elle relie pour un gaz, son état statistique, invisible car microscopique, à son état macroscopique, mesurable, sensible.
- Elle est utile à la démonstration du théorème de l'entropie de Boltzmann, relatif en thermodynamique, à l'évolution de l'entropie avec le désordre.
- Elle fait partie, de ce fait, des équations fondamentales les plus importantes de la physique.

Nous avons tenté en Annexe C, une synthèse de sa démonstration, à partir de différents cours et ouvrages de physique statistique [14, 15, 16], en évitant l'appel à des objets mathématiques utiles mais complexes dans ce cadre, comme la fonction de Dirac, ou à des développements statistiques trop amont (Hamilton, Liouville, hiérarchie BBGKY..) que l'on retrouve dans les ouvrages précédemment cités.

Nous avons obtenu dans l'annexe C, l'équation de Boltzmann avec collision (C.54) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial \mathbf{x}} = \\ + \int d\mathbf{v}_2 \int d\Omega \sigma(\Omega) |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| [f(\mathbf{x}, \mathbf{v}'_1, t) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}'_2, t) - f(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, t) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}_2, t)] \end{aligned} \quad (3.1)$$

Les grandeurs locales : densité, vitesse, température sont alors des moyennes calculées à l'aide de $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ [16].

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \int_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \mathbf{v} d\mathbf{v} \quad (3.3)$$

$$k\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \int_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) (m/D) |\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{v} \quad (3.4)$$

(Avec m : masse moléculaire du gaz, k_B : constante de Boltzmann et D : nombre de degrés de liberté de la particule).

L'équation de Boltzmann est irréversible : en effet le renversement du temps n'opère pas de changement de signe dans l'intégrale de collision, alors que le membre sans collision change de signe. On a production d'entropie. Pour le montrer Boltzmann introduit la fonctionnelle :

$$H(t) = \int_{\mathbf{x}} \int_{\mathbf{v}} [f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) [\ln f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)]] d\mathbf{x}, d\mathbf{v} \quad (3.5)$$

On y associe l'entropie de Boltzmann $S_B(t) = -k_B H(t) + \text{constante}$. On étudie la variation au cours du temps de ces fonctions : $S_B(t)$ et $H(t)$.

$$\frac{\partial S_B(t)}{\partial t} = -k_B \frac{\partial H(t)}{\partial t} \quad (3.6)$$

L'équation de Boltzmann (3.1), associée à l'équation (3.5) permet de montrer [14, 15, 16], que :

$$\frac{\partial H(t)}{\partial t} \leq 0, \quad \frac{\partial S_B(t)}{\partial t} \geq 0. \quad (3.7)$$

L'entropie de Boltzmann ne peut pas décroître au cours du temps. Elle ne peut que croître ou rester stationnaire.

En notant que l'équation (3.5) est bien bornée, car l'énergie doit rester bornée quand $d\mathbf{v} \rightarrow 0$.

$$\int_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) |\mathbf{v}|^2 d\mathbf{v} \quad (3.8)$$

On voit que $H(t)$ décroît, jusqu'à atteindre une valeur d'équilibre H^{eq} définie par :

$$\frac{\partial H(t)}{\partial t} = 0 \quad (3.9)$$

Ceci est obtenu dans le terme de collision de l'équation de Boltzmann (3.1) en annulant le terme entre [] soit :

$$[f^{eq}(\mathbf{x}, \mathbf{v}'_1, t)f^{eq}(\mathbf{x}, \mathbf{v}'_2, t) = f^{eq}(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, t)f^{eq}(\mathbf{x}, \mathbf{v}_2, t)] \quad (3.10)$$

On peut prendre le logarithme népérien de cette expression :

$$\ln f^{eq}(\mathbf{x}, \mathbf{v}'_1, t) + \ln f^{eq}(\mathbf{x}, \mathbf{v}'_2, t) = \ln f^{eq}(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, t) + \ln f^{eq}(\mathbf{x}, \mathbf{v}_2, t) \quad (3.11)$$

Cette relation montre que $\ln f^{eq}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ est une fonction invariante lors d'une collision. On a vu précédemment (annexe C) que les seuls invariants d'une collision sont : la masse, la quantité de mouvement et l'énergie. On en déduit donc, que $\ln f^{eq}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ a la forme suivante :

$$\ln f^{eq}(\mathbf{v}) = -Am|\mathbf{v} - \mathbf{u}|^2 + \ln B \quad (3.12)$$

(Avec A et B des coefficients à déterminer).

En utilisant les équations (3.2) valables à l'équilibre, on obtient l'expression connue de la distribution à l'équilibre, appelée distribution de Maxwell-Boltzmann :

$$f^{eq}(\mathbf{v}) = \rho \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{D/2} \exp \left[\frac{-m|\mathbf{v} - \mathbf{u}|^2}{2\pi k_B T} \right] \quad (3.13)$$

La propriété de conservation des invariants, qu'on notera ψ_k peut se traduire formellement par l'expression :

$$\int_v \psi_k \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{collision} d\mathbf{v} = 0 \quad (3.14)$$

avec $\psi_1 = 1$, $\psi_{2,3,4} = v_i$, $\psi_5 = v_i v_i$

On peut définir un opérateur de collision simplifié, appelé BGK [5], en considérant que la relaxation de $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ vers la fonction de distribution d'équilibre $f^{eq}(\mathbf{v})$ se fait dans le temps de relaxation caractéristique λ .

On écrit alors :

$$\frac{\partial(f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t))}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial(f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t))}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{1}{\lambda} ((f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) - f^{eq}(\mathbf{v}))) \quad (3.15)$$

Par rapport aux paramètres d'un gaz indiqués en annexe C, on peut interpréter λ comme le temps $\tau \sim l_m/v$ entre 2 collisions.

3.2 Lattice Boltzmann Equation

On se rapprochera des publications non exhaustives suivantes qui développent en plus ou moins de détail, la méthode de Boltzmann sur réseau

- [13, 30, 31], les thèses de [1, 2], les articles correspondants à ces thèses [32, 33, 34]

3.3 Lattice Boltzmann Equation : écoulement 1D visqueux, isotherme

On développera ici, le cas des équations de Boltzmann sur réseau (LBE) mono-dimensionnelles, isothermes, peu fréquent dans la littérature.

Le fluide est donc décrit par une fonction de distribution $f(x, c, t)$ (on écrira en 1D : $x = \mathbf{x}, c = \mathbf{v}, u = \mathbf{u}$). On définira comme précédemment les variables macroscopiques en intégrant sur toutes les vitesses c possibles soit :

$$\rho = \int_{\mathbb{R}^1} f(x, c, t) dc, \quad \rho u = \int_{\mathbb{R}^1} f(x, c, t) c dc, \quad \rho e + \frac{1}{2} \rho u^2 = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^1} f(x, c, t) c^2 dc \quad (3.16)$$

(Avec l'énergie interne du gaz $e = \frac{1}{2} r T$ et $r = k_B/m$).

On utilisera par la suite la notion de température généralisée $\theta = rT$. Dans le cas isotherme T est constante et par conséquent θ l'est également. L'équation de Boltzmann qui décrit le déplacement et la collision entre elles des particules du fluide s'écrit en mono-dimensionnelle :

$$\frac{\partial f(x, c, t)}{\partial t} + c \frac{\partial f(x, c, t)}{\partial x} = \left(\frac{\partial f(x, c, t)}{\partial t} \right)_{collision} \quad (3.17)$$

et, simplifiée par la formulation BGK :

$$\frac{\partial f(x, c, t)}{\partial t} + c \frac{\partial f(x, c, t)}{\partial x} = -\frac{1}{\lambda} (f(x, c, t) - f^{eq}(c)) \quad (3.18)$$

L'expression de la distribution d'équilibre de Maxwell-Boltzmann s'écrit en 1D :

$$f^{eq}(c) = \frac{\rho}{\sqrt{2\pi\theta}} \exp \left[-\frac{|c - u|^2}{2\theta} \right] \quad (3.19)$$

On développera la fonction de distribution $f(x, c, t)$ en terme de nombre de Knudsen ε , après avoir a-dimensionné (3.18) :

$$\text{nombre de Knudsen : } \varepsilon = \frac{\tau_0 \sqrt{\theta_0}}{L} \quad (3.20)$$

(Avec l_m : libre parcours moyen, τ_0 : temps moyen de relaxation et $\sqrt{\theta_0}$: vitesse caractéristique de l'agitation thermique.)

$$\hat{t} = t \frac{\sqrt{\theta_0}}{l_m}, \hat{x} = \frac{x}{l_m}, \hat{\tau} = \frac{\tau}{\tau_0}, \hat{\theta} = \frac{\theta}{\theta_0}, \hat{c} = \frac{c}{\sqrt{\theta_0}}, \hat{f}(x, c, t) = \frac{f(x, c, t)}{\rho_0} \quad (3.21)$$

L'expression (3.18) devient :

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{t}} + \hat{c} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{x}} = -\frac{1}{\lambda \varepsilon} (\hat{f} - \hat{f}^{eq}) \quad (3.22)$$

On supprimera les (\cdot) dans l'écriture en n'oubliant pas que l'on analyse un système a-dimensionné.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{\lambda \varepsilon} (f - f^{eq}) \quad (3.23)$$

Dans la méthode de Chapman et Enskog [35], on recherche les solutions normales sous la forme d'un développement de la fonction de distribution $f(x, c, t)$ en terme de nombre de Knudsen ε :

$$f = f^{(0)} + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \dots \quad (3.24)$$

On introduit ce développement dans (3.23) et on égale les différents ordres d' ε :

$$\text{ordre}(0) \quad f^{(0)} = f^{eq} \quad (3.25)$$

$$\text{ordre}(1) \quad \frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} + c \frac{\partial f^{(0)}}{\partial x} = -\frac{1}{\lambda} f^{(1)} \quad (3.26)$$

On a, en posant $\tau = \varepsilon \lambda$, en se limitant à l'ordre 1 :

$$f = f^{(0)} + \varepsilon \lambda f^{(1)} = f^{eq} - \tau \left(\frac{\partial f^{(eq)}}{\partial t} + c \frac{\partial f^{(eq)}}{\partial x} \right) \quad (3.27)$$

On a les invariants suivants ψ_k , traduisant la conservation de la masse, du moment et de l'énergie :

$$\int_{\mathbb{R}^1} \psi_k \left(\frac{\partial f(x, c, t)}{\partial t} \right)_{collision} dc = 0 \quad (3.28)$$

(Avec $\psi_1 = 1$, $\psi_2 = c$, $\psi_3 = c^2$).

En appliquant le premier invariant ψ_1 , on obtient avec (3.16) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \quad (3.29)$$

Pour le second invariant $\psi_2 = c$:

$$\int_{\mathbb{R}^1} \left(c \frac{\partial f}{\partial t} + c^2 \frac{\partial f}{\partial x} \right) dc = 0 \quad (3.30)$$

On introduit le développement (3.27) dans (3.30) pour obtenir l'équation de conservation du moment, suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^1} c \left(\frac{\partial}{\partial t} (f^{eq} - \tau (\frac{\partial f^{eq}}{\partial t} + c \frac{\partial f^{eq}}{\partial x})) + c \frac{\partial}{\partial x} (f^{eq} - \tau (\frac{\partial f^{eq}}{\partial t} + c \frac{\partial f^{eq}}{\partial x})) \right) dc = 0 \quad (3.31)$$

On peut réarranger cette intégrale :

$$\int_{\mathbb{R}^1} \left(c \frac{\partial f^{eq}}{\partial t} + c^2 \frac{\partial f^{eq}}{\partial x} \right) dc - \tau \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^1} \left(c \frac{\partial f^{eq}}{\partial t} + c^2 \frac{\partial f^{eq}}{\partial x} \right) dc - \tau \frac{\partial}{\partial x} \int_{\mathbb{R}^1} \left(c^2 \frac{\partial f^{eq}}{\partial t} + c^3 \frac{\partial f^{eq}}{\partial x} \right) dc = 0 \quad (3.32)$$

La première intégrale de (3.32) (ordre 0), contenant les invariants $\psi_2 = c$, $\psi_3 = c^2$ de la fonction f^{eq} , vaut :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^1} (cf^{eq})dc + \frac{\partial}{\partial x} \int_{\mathbb{R}^1} (c^2 f^{eq})dc = 0 \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho \theta}{\partial x} = 0 \quad (3.34)$$

Et en isotherme :

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} = -\theta \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (3.35)$$

que l'on peut écrire en utilisant (3.29) :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} = -\theta \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (3.36)$$

La seconde intégrale de (3.32) vaut 0 pour la même raison :

Le premier terme de la troisième intégrale de (3.32) (ordre 1) est égal (conservation de l'énergie (3.16)) à :

$$\begin{aligned} -\tau \int_{\mathbb{R}^1} c^2 \frac{\partial f^{eq}}{\partial t} dc &= -\tau \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^1} f^{eq} c^2 dc \\ &= -\tau \frac{\partial}{\partial t} (\rho u^2 + \rho \theta) \end{aligned} \quad (3.37)$$

On transforme le dernier terme de la troisième intégrale de (3.32) :

$$\begin{aligned} -\tau \frac{\partial}{\partial x} \int f^{eq} c^3 dc &= -\tau \frac{\partial}{\partial x} \left(\int f^{eq} (c-u)^3 dc + u^3 \int f^{eq} dc + 3u \int f^{eq} c^2 dc - 3u^2 \int c f^{eq} dc \right) \\ &= -\tau \frac{\partial}{\partial x} \left(\int f^{eq} (c-u)^3 dc + u^3 \rho + 3u(\rho u^2 + \rho \theta) - 3u^2 \rho u \right) \\ &= -\tau \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^3 + 3u \rho \theta) \end{aligned} \quad (3.38)$$

Car l'intégrale impaire :

$$\int f^{eq} (c-u)^3 dc = 0 \quad (3.39)$$

Le terme d'ordre 1 de la conservation du moment devient donc en isotherme :

$$-\tau \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho u^2) + \theta \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^3) + 3\theta \frac{\partial \rho u}{\partial x} \right] \quad (3.40)$$

Développons et réordonnons le terme entre [] de l'équation (3.40), en utilisant (3.35), (3.36) et (3.29) :

$$[\quad] = \rho u \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \theta \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + 3\theta \frac{\partial \rho u}{\partial x} \quad (3.41)$$

$$= 2u(\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x}) - \theta \frac{\partial \rho u}{\partial x} + 3\theta \frac{\partial \rho u}{\partial x} \quad (3.42)$$

$$= 2\theta \rho \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.43)$$

Le terme d'ordre 1 de la conservation du moment est donc :

$$-\tau \frac{\partial}{\partial x} (2\theta \rho \frac{\partial u}{\partial x}) \quad (3.44)$$

On développe le dernier invariant $\psi_3 = c^2$, en introduisant le développement (3.27) dans (3.45) et on obtient l'équation de conservation de l'énergie (3.46) :

$$\int_{\mathbb{R}^1} (c^2 \frac{\partial f}{\partial t} + c^3 \frac{\partial f}{\partial x}) dc = 0 \quad (3.45)$$

que l'on développe :

$$\int_{\mathbb{R}^1} c^2 (\frac{\partial}{\partial t} (f^{eq} - \tau (\frac{\partial f^{eq}}{\partial t} + c \frac{\partial f^{eq}}{\partial x})) + c \frac{\partial}{\partial x} (f^{eq} - \tau (\frac{\partial f^{eq}}{\partial t} + c \frac{\partial f^{eq}}{\partial x}))) dc = 0 \quad (3.46)$$

On peut réarranger cette intégrale sous la forme :

$$\int_{\mathbb{R}^1} (c^2 \frac{\partial f^{eq}}{\partial t} + c^3 \frac{\partial f^{eq}}{\partial x}) dc - \tau \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^1} (c^2 \frac{\partial f^{eq}}{\partial t} + c^3 \frac{\partial f^{eq}}{\partial x}) dc - \tau \frac{\partial}{\partial x} \int_{\mathbb{R}^1} (c^3 \frac{\partial f^{eq}}{\partial t} + c^4 \frac{\partial f^{eq}}{\partial x}) dc = 0 \quad (3.47)$$

La première et la seconde intégrale de (3.47) , invariant $\psi_3 = c^2$ de la fonction f^{eq} , valent :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^1} (c^2 f^{eq}) dc + \frac{\partial}{\partial x} \int_{\mathbb{R}^1} (c^3 f^{eq}) dc = 0 \quad (3.48)$$

Soit :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u^2 + \rho \theta) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^3 + 3u\rho\theta) = 0 \quad (3.49)$$

Et en isotherme :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u^2) + \theta \frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^3) + \theta \frac{\partial}{\partial x} (3u\rho) = 0 \quad (3.50)$$

Cette équation avec les équations (3.29) et (3.35) constituent les équations d'Euler :

Le premier terme de la troisième intégrale de (3.47) (ordre 1) est égal, d'après l'équation (3.38), à :

$$-\tau \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho u^3) + \theta \frac{\partial}{\partial t} (3u\rho) \right) \quad (3.51)$$

On transforme le dernier terme de la dernière intégrale de (3.47) :

$$\begin{aligned} \tau \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \int f^{eq} c^4 dc &= \\ \tau \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} &\left(\int f^{eq} (c-u)^4 dc - u^4 \int f^{eq} dc - 6u^2 \int c^2 f^{eq} dc + 4u \int f^{eq} c^3 dc + 4u^3 \int c f^{eq} dc \right) \\ &= \tau \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\int f^{eq} (c-u)^4 dc + u^4 \rho - 6u^2 (\rho u^2 + \rho \theta) + 4u (\rho u^3 + 3u\rho\theta) + 4u^3 \rho u \right) \\ &= \tau \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\int f^{eq} (c-u)^4 dc + u^4 \rho + 6u^2 \rho \theta \right) \end{aligned} \quad (3.52)$$

Calculons le terme $\int f^{eq} (c-u)^4 dc$:

$$\int f^{eq} (c-u)^4 dc = \frac{\rho}{\sqrt{2\pi\theta}} \int (c-u)^4 \exp \left[-\frac{|c-u|^2}{2\theta} \right] dc \quad (3.53)$$

Avec le changement de variable :

$$y = \frac{(c-u)}{\sqrt{2\theta}} \quad (3.54)$$

il vient :

$$\int f^{eq} (c-u)^4 dc = \frac{\rho}{\sqrt{2\pi\theta}} (2\theta)^2 \sqrt{2\theta} \int y^4 e^{-y^2} dy \quad (3.55)$$

L'intégrale de Gauss vaut :

$$\int y^4 e^{-y^2} dy = \frac{3}{4} \sqrt{\pi} \quad (3.56)$$

$$\int f^{eq} (c-u)^4 dc = 3\rho\theta^2 \quad (3.57)$$

Le terme d'ordre 1 de (3.46) vaut donc en isotherme :

$$-\tau \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho u^3) + \theta \frac{\partial}{\partial t} (3u\rho) + 3\theta^2 \frac{\partial}{\partial x} \rho + \frac{\partial}{\partial x} (u^4 \rho) + 6\theta \frac{\partial}{\partial x} (u^2 \rho) \right] \quad (3.58)$$

Nous développons le [] de (3.58) et le réordonnons pour faire disparaître certains termes :

$$[] = u \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho u^2) + \theta \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^3) + 3\theta \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) \right) \quad (3.59a)$$

$$+ 2\theta u \frac{\partial \rho}{\partial t} + 3\theta u \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) \quad (3.59b)$$

$$+ u^2 \left(\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (3.59c)$$

$$+ 3\theta \left(\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (3.59d)$$

$$+ 3\rho u \theta \frac{\partial u}{\partial x} + 3\theta^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (3.59e)$$

Examinons chacune des lignes :

$$(3.59a) = 0 \quad : \text{équation de l'énergie à l'ordre 0.} \quad (3.60)$$

$$(3.59b) = -2\theta u \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + 3\theta u \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \quad : \text{équation de masse.} \quad (3.61)$$

$$(3.59c) = -\theta u^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad : \text{équation du moment à l'ordre 0.} \quad (3.62)$$

$$(3.59d) = -\theta^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad : \text{équation du moment à l'ordre 0.} \quad (3.63)$$

On obtient finalement :

$$-\tau \frac{\partial}{\partial x} [\quad] = -\tau \frac{\partial}{\partial x} 4\rho u \theta \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.64)$$

Les équations finales de Navier-Stokes d'un écoulement isotherme, compressible et visqueux s'écrivent :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \quad (3.65)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \theta \frac{\partial \rho}{\partial x} - \tau \frac{\partial}{\partial x} (2\rho \theta \frac{\partial u}{\partial x}) = 0 \quad (3.66)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho (\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}\theta)) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u (\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}\theta) + u\rho\theta - \tau (2\rho u \theta \frac{\partial u}{\partial x})) = 0 \quad (3.67)$$

D'après l'équation précédente, en identifiant terme à terme, la pression est égale à :

$$P = \rho\theta - \tau (2\rho\theta \frac{\partial u}{\partial x}) \quad (3.68)$$

Dans les équations de Navier-Stokes 1D, on a :

$$P = \rho\theta - \tau \text{ avec } \tau = \frac{4}{3}\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.69)$$

Le coefficient de viscosité dynamique μ est donc tel que : $4/3\mu = 2\tau\rho\theta$.

On vérifie bien que l'on retrouve les équations de N-S avec la méthode de Boltzmann.

Nous allons poursuivre celle-ci en discrétisant les vitesses ainsi que l'espace et le temps [36, 37].

Equation de Boltzmann à vitesses discrètes

$$\frac{\partial f_l}{\partial t} + c_l \frac{\partial f_l}{\partial x} = -\frac{1}{\lambda} (f_l - f_l^{eq}) \quad (3.70)$$

(Avec $f_l = f(x, c_l, t)$ avec $l = 1, 3$ et $c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = -1$ pour un réseau D1Q3 (3.1).

Le réseau mono-dimensionnel avec 3 vitesses D1Q3 donne une quadrature d'un ordre suffisant pour retrouver les équations de Navier-Stokes mono-dimensionnelles, isothermes au niveau macroscopique. Les fonctions d'équilibre s'écrivent :

$$f_l^{eq}(\rho, u) = w_l \rho (1 + \frac{c_l u}{c_s^2} + \frac{1}{2c_s^4} (c_l u)^2 - \frac{1}{2c_s^2} u^2) \quad (3.71)$$

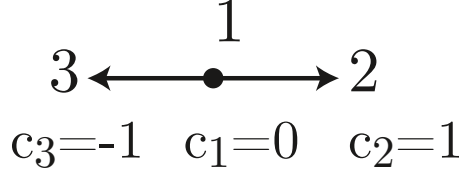


FIGURE 3.1 – Schéma de vitesse D1Q3

(Avec w_l et $c_s = \frac{1}{\sqrt{3}}$: poids du réseau et vitesse du son pour le réseau.)
On a respectivement :

$$w_1 = \frac{2}{3}, w_2 = \frac{1}{6}, w_3 = \frac{1}{6}. \quad (3.72)$$

On décomposera les paramètres (et en particulier la fonction de distribution), en composantes stationnaires \bar{f}_l et fluctuantes f'_l [23].

$$f_l = \bar{f}_l + f'_l \text{ avec } \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (3.73)$$

La décomposition des variables macroscopiques s'écrit :

$$\bar{\rho} = \sum_{l=1}^3 \bar{f}_l \text{ et } \rho' = \sum_{l=1}^3 f'_l \quad (3.74)$$

$$\bar{\rho}\bar{u} = \sum_{l=1}^3 c_l \bar{f}_l \text{ et } \rho' \tilde{u} = \sum_{l=1}^3 c_l f'_l \bar{\rho} e + \bar{\rho} \tilde{u}^2 = \sum_{l=1}^3 c_l^2 \bar{f}_l \quad (3.75)$$

$$(\rho e)' + \rho' \tilde{u}^2 = \sum_{l=1}^3 c_l^2 f'_l \quad (3.76)$$

La vitesse \tilde{u} est définie comme :

$$\tilde{u} = \frac{(\rho u)'}{\rho'} \quad (3.77)$$

L'équation de boltzmann en régime stationnaire s'écrit :

$$c_l \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = -\frac{1}{\lambda} (\bar{f}_l - \bar{f}_l^{\bar{e}q}) \quad (3.78)$$

(Avec $\bar{f}_l^{\bar{e}q} = f_l^{eq}(\bar{\rho}, \bar{u})$: fonctions de distribution à l'équilibre pour les composantes stationnaires).

On peut récrire l'équation (3.70) avec les équations (3.78) et (3.73) :

$$\frac{\partial f'_l}{\partial t} + c_l \frac{\partial f'_l}{\partial x} = -\frac{1}{\lambda} (f'_l - (f_l^{eq} - \bar{f}_l^{\bar{e}q})) \quad (3.79)$$

Après l'a-dimensionnement de l'équation (3.79), on aboutit à l'équation suivante (en supprimant les $()$) :

$$\frac{\partial f'_l}{\partial t} + c_l \frac{\partial f'_l}{\partial x} = -\frac{1}{\tau}(f'_l - (f_l^{eq} - \bar{f}_l^{eq})) \quad (3.80)$$

(Avec $\tau = \epsilon\lambda$).

On écrira pour la suite, la fonction d'équilibre dans le réseau $D1Q3$, sous la forme :

$$f_l^{eq} = \alpha_l \rho + \beta_l \rho u + \gamma_l \rho u^2 \quad (3.81)$$

Avec :

$$\alpha_1 = \frac{2}{3}, \alpha_2 = \frac{1}{6}, \alpha_3 = \frac{1}{6}, \beta_1 = 0, \beta_2 = \frac{1}{2}, \beta_3 = -\frac{1}{2}, \gamma_1 = -1, \gamma_2 = \frac{1}{2}, \gamma_3 = \frac{1}{2} \quad (3.82)$$

On peut récrire (3.81) avec (3.74) :

$$f_l^{eq} = \alpha_l \left(\sum_{j=1}^3 \bar{f}_j + \sum_{j=1}^3 f'_j \right) + \beta_l \left(\sum_{j=1}^3 c_j \bar{f}_j + \sum_{j=1}^3 c_j f'_j \right) + \gamma_l \frac{(\sum_{j=1}^3 c_j \bar{f}_j + \sum_{j=1}^3 c_j f'_j)^2}{(\sum_{j=1}^3 \bar{f}_j + \sum_{j=1}^3 f'_j)} \quad (3.83)$$

On a pour la part stationnaire :

$$\bar{f}_l^{eq} = \alpha_l \sum_{j=1}^3 \bar{f}_j + \beta_l \sum_{j=1}^3 c_j \bar{f}_j + \gamma_l \frac{(\sum_{j=1}^3 c_j \bar{f}_j)^2}{(\sum_{j=1}^3 \bar{f}_j)} \quad (3.84)$$

En reportant (3.83) et (3.84) dans (3.80) il vient :

$$\frac{\partial f'_l}{\partial t} + c_l \frac{\partial f'_l}{\partial x} = -\frac{1}{\tau} \left(f'_l - \left[\alpha_l \left(\sum_{j=1}^3 f'_j \right) + \beta_l \left(\sum_{j=1}^3 c_j f'_j \right) + \gamma_l \left(\frac{(\sum_{j=1}^3 c_j f'_j + \bar{\rho} \bar{u})^2}{(\sum_{j=1}^3 f'_j + \bar{\rho})} \right) - \bar{\rho} \bar{u}^2 \right] \right) \quad (3.85)$$

Stabilité linéaire et non linéaire des équations de Boltzmann

Après avoir rappelé les mécanismes d'instabilité et de focalisation numérique dus à la discrétisation du temps et de l'espace dans un schéma donné, après avoir, avec la méthode des ondes résonantes, tracé des cartes d'instabilité de l'équation de Burgers, nous appliquons ces méthodes à l'équation de Boltzmann sur réseau obtenu au chapitre précédent.

Nous étudierons successivement la stabilité linéaire puis la stabilité non linéaire, en examinant la présence ou non du phénomène de focalisation

4.1 Discrétisation en espace et en temps

Nous partirons du système des 3 équations non linéaires du chapitre précédent (3.80) pour les études de stabilité (équivalentes à celle de l'équation de Burgers (2.3)), après avoir discrétisé et intégré les 2 membres de ces équations. Nous utiliserons des schémas numériques différents du schéma leapfrog de discrétisation de l'équation de Burgers.

$$\frac{\partial f'_l}{\partial t} + c_l \frac{\partial f'_l}{\partial x} = -\frac{1}{\tau} (f'_l - (f_l^{eq} - \bar{f}_l^{\bar{eq}})) \quad (4.1)$$

Nous utiliserons, compte tenu, que le premier terme est une différentielle totale en x et t , la méthode des caractéristiques :

$$\frac{df'_l}{dt} = -\frac{1}{\tau} (f'_l - (f_l^{eq} - \bar{f}_l^{\bar{eq}})) \quad (4.2)$$

On peut intégrer cette équation le long de la caractéristique c_l pour un temps Δt et évaluer le terme de collision par la méthode des trapèzes :

$$\int_0^{\Delta t} \frac{df'_l}{dt} ds = -\frac{1}{\tau} \int_0^{\Delta t} (f'_l - (f_l^{eq} - \bar{f}_l^{\bar{eq}})) ds \quad (4.3)$$

Après intégration, il vient :

$$f'_l(x + c_l \Delta t, t + \Delta t) - f'_l(x, t) = -\frac{\Delta t}{2\tau} [f'_l(x + c_l \Delta t, t + \Delta t) + f'_l(x, t) - ((f_l^{eq}(x + c_l \Delta t, t + \Delta t) + f_l^{eq}(x, t)) - (\bar{f}_l^{\bar{eq}}(x + c_l \Delta t, t + \Delta t) + \bar{f}_l^{\bar{eq}}(x, t)))] \quad (4.4)$$

On posera :

$$\begin{aligned}
h_l(x, t) &= f'_l(x, t) + \frac{\Delta t}{2\tau} [f'_l(x, t) - (f_l^{eq}(x, t) - \bar{f}_l^{eq}(x, t))] \\
&= (1 + \frac{\Delta t}{2\tau}) f'_l(x, t) - \frac{\Delta t}{2\tau} (f_l^{eq}(x, t) - \bar{f}_l^{eq}(x, t))
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Et donc :

$$\begin{aligned}
h_l(x + c_l \Delta t, t + \Delta t) &= (1 + \frac{\Delta t}{2\tau}) f'_l(x + c_l \Delta t, t + \Delta t) \\
&\quad - \frac{\Delta t}{2\tau} (f_l^{eq}(x + c_l \Delta t, t + \Delta t) - \bar{f}_l^{eq}(x + c_l \Delta t, t + \Delta t))
\end{aligned} \tag{4.6}$$

En posant $\tau_g = \tau + \frac{\Delta t}{2}$, on aboutit à l'équation finale :

$$h_l(x + c_l \Delta t, t + \Delta t) = (1 - \frac{\Delta t}{\tau_g}) f'_l(x, t) + \frac{\Delta t}{\tau_g} (f_l^{eq}(x, t) - \bar{f}_l^{eq}(x, t)) \tag{4.7}$$

On discrétisera x et t suivant $x = n\Delta x, t = m\Delta t$. On posera également $\Delta x = c_l \Delta t$ et $\Delta t = 1$.

L'équation (4.7) s'écrira sous la forme :

$$h_l(m + 1, n + c_l) = (1 - \frac{\Delta t}{\tau_g}) f'_l(m, n) + \frac{\Delta t}{\tau_g} (f_l^{eq}(m, n) - \bar{f}_l^{eq}(m, n)) \tag{4.8}$$

Avec :

$$(f_l^{eq} - \bar{f}_l^{eq}) = \alpha_l (\sum f'_j) + \beta_l (\sum c_j f'_j) + \gamma_l \left(\frac{(\sum c_j f'_j + \bar{\rho} \bar{u})^2}{(\sum f'_j + \bar{\rho})} - \bar{\rho} \bar{u}^2 \right). \tag{4.9}$$

On a simplifié la notation en supprimant les indices (m, n) et les bornes des sommes \sum , prises systématiquement de 1 à 3. On gardera seulement la parenthèse $(,)$ pour $(m + 1,)$ ou $(, n + 1)$ ou $(, n + c_l)$. On démontre[23] aussi que :

$$(\sum f'_j) = (\sum h_j) \quad (\sum c_j f'_j) = (\sum c_j h_j) \tag{4.10}$$

On pose :

$$\frac{1}{\tau_g} = \omega = \frac{1}{3\nu + \frac{1}{2}} \text{ avec } \nu = \frac{\mu}{\rho} \tag{4.11}$$

L'équation finale qui sera analysée deviendra donc :

$$h_l(m + 1, n + c_l) = (1 - \omega) h_l(m, n) + \omega \left[\alpha_l \sum h_j + \beta_l \sum c_j h_j + \gamma_l \left(\frac{(\sum c_j h_j + \bar{\rho} \bar{u})^2}{(\sum h_j + \bar{\rho})} - \bar{\rho} \bar{u}^2 \right) \right] \tag{4.12}$$

4.2 Stabilité linéaire des équations de Boltzmann

Linéarisation

Soit $h_l(NL)$ la partie non linéaire de (4.12), à linéariser :

$$h_l(NL) = \omega \gamma_l \left(\frac{(\sum c_j h_j + \bar{\rho} \bar{u})^2}{(\sum h_j + \bar{\rho})} - \bar{\rho} \bar{u}^2 \right) = \omega \gamma_l \left(\frac{(\sum c_j f'_j + \bar{\rho} \bar{u})^2}{(\sum f'_j + \bar{\rho})} - \bar{\rho} \bar{u}^2 \right) \quad (4.13)$$

La linéarisation est obtenue en effectuant :

$$\left(\frac{\partial h(NL)}{\partial f'_j} \right)_{f'_j = \bar{f}_j} = \omega \gamma_l \left(2c_j \frac{(\sum c_j f'_j + \bar{\rho} \bar{u})}{(\sum f'_j + \bar{\rho})} - \frac{(\sum c_j f'_j + \bar{\rho} \bar{u})^2}{(\sum f'_j + \bar{\rho})^2} \right)_{f'_j = \bar{f}_j} \quad (4.14)$$

$$= \omega \gamma_l \left(2c_j \left(\frac{2\bar{\rho} \bar{u}}{2\bar{\rho}} \right) - \frac{(2\bar{\rho} \bar{u})^2}{(2\bar{\rho})^2} \right) \quad (4.15)$$

$$= \omega \gamma_l (2c_j \bar{u} - \bar{u}^2) \quad (4.16)$$

L'analyse linéaire de Von Neumann [38] consiste à chercher des solutions sous forme d'onde plane d'une équation linéarisée. On pose [39] :

$$h_l = g_l e^{i(kx - \Omega t)} \quad (4.17)$$

(Avec k nombre d'onde et Ω pulsation).

En portant (4.17) dans l'équation (4.12), linéarisée par le terme final de (4.14), on obtient :

$$g_l e^{i(k(x+\Delta x) - \Omega(t+\Delta t))} = (1 - \omega) g_l e^{i(kx - \Omega t)} + \omega \left[\sum_j (\alpha_l - \gamma_l \bar{u}^2 + c_j (\beta_l + 2\gamma_l \bar{u})) g_j \right] e^{i(kx - \Omega t)} \quad (4.18)$$

Pour simplifier l'écriture, on posera :

$$\alpha_{lj} = (\alpha_l - \gamma_l \bar{u}^2 + c_j (\beta_l + 2\gamma_l \bar{u})) \quad (4.19)$$

En écrivant $\Delta x = c_l$ et $\Delta t = 1$, et en simplifiant par $e^{i(kx - \Omega t)}$, on obtiendra les équations aux valeurs et vecteurs propres suivantes :

$$g_l e^{-i\Omega} = e^{-ikc_l} ((1 - \omega) g_l + \omega \sum_j \alpha_{lj} g_j) \quad (4.20)$$

Ou en posant $\lambda = e^{-i\Omega}$:

$$(\lambda \delta_{lj} + e^{-ikc_l} ((1 - \omega) \delta_{lj} + \omega \alpha_{lj})) g_j = 0 \quad (4.21)$$

$$(\lambda \delta_{lj} + e^{-ikc_l}((1 - \omega)\delta_{lj} + \omega \alpha_{lj}))g_j = 0 \quad (4.22)$$

Pour calculer le déterminant et calculer les valeurs propres, on revient aux valeurs de $\alpha_l, \beta_l, \gamma_l, c_l$. On obtient l'équation complexe et "complexe" du troisième degré suivante :

$$(1 - \lambda)(-d + \lambda(d \cos k + 2iu\omega \sin k)) + (b + d - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda \cos k + 1) = 0 \quad (4.23)$$

$$\text{Avec } d = \omega\left(\frac{2}{3} + \bar{u}^2\right) \text{ et } b = (1 - \omega) \quad (4.24)$$

On obtiendra Ω à partir de λ de la façon suivante :

$$\lambda = \lambda_r + i\lambda_c = e^{-i(\Omega_r + i\Omega_c)} = e^{\Omega_c} e^{-i\Omega_r} \quad (4.25)$$

Soit :

$$\lambda_r = e^{\Omega_c} \cos \Omega_r \quad (4.26)$$

$$\lambda_c = -e^{\Omega_c} \sin \Omega_r \quad (4.27)$$

Et :

$$\tan \Omega_r = -\frac{\lambda_c}{\lambda_r} \quad (4.28)$$

$$\Omega_c = \log(\sqrt{(\lambda_r^2 + \lambda_c^2)}) \quad (4.29)$$

La valeur critique de $\Omega_c = 0$ se produit pour $(\lambda_r^2 + \lambda_c^2) = 1$.

Soit l'équation du troisième degré dont on peut calculer les racines par les formules de Cardan :

$$-\lambda^3 + \lambda^2((b + d + 2 \cos k - d \cos k) - i(2\bar{u}\omega \sin k)) + \lambda((d - 1 - (2b + d) \cos k) + i(2\bar{u}\omega \sin k)) + b = 0 \quad (4.30)$$

On a représenté sur les figures (4.1a), (4.1b), (4.1c), en 3D ($\sqrt{(\lambda_r^2 + \lambda_c^2)}$) en fonction de \bar{u} et du nombre d'onde k , où k est compris entre 0 et 2π et où \bar{u} est compris entre 0 et 1.

Les différentes figures (4.1) présentées montrent des valeurs critiques ($\sqrt{(\lambda_r^2 + \lambda_c^2)} > 1$) autour de 0.42 et autour de 0.57. On peut retrouver ces solutions en intuitant raisonnablement sur l'équation (4.23).

$$(1 - \lambda)(-d + \lambda(d \cos k + 2i\bar{u}\omega \sin k)) + (b + d - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda \cos k + 1) = 0 \quad (4.31)$$

On peut en effet écrire les égalités suivantes :

$$\omega(\bar{u}^2 - 2\bar{u} + \frac{2}{3}) = \omega(\frac{2}{3} + (\bar{u})^2) - 2\bar{u}\omega = d - 2\bar{u}\omega \quad (4.32)$$

$$(\lambda^2 - 2\lambda \cos k + 1) = (\lambda - (\cos k + i \sin k))(\lambda - (\cos k - i \sin k)) \quad (4.33)$$

On a donc :

$$2\bar{u}\omega = d - \omega(\bar{u}^2 - 2\bar{u} + \frac{2}{3}) \quad (4.34)$$

On remplace ces égalités dans l'équation aux valeurs propres (4.23). Le premier terme s'écrit :

$$(1 - \lambda)(-d + \lambda d \cos k + \lambda i \sin k(d - \omega(\bar{u}^2 - 2\bar{u} + \frac{2}{3}))) = \quad (4.35)$$

$$d(1 - \lambda)(-1 + \lambda(\cos k + i \sin k)) - i\omega\lambda(1 - \lambda) \sin k(\bar{u}^2 - 2\bar{u} + \frac{2}{3}) \quad (4.36)$$

Soit :

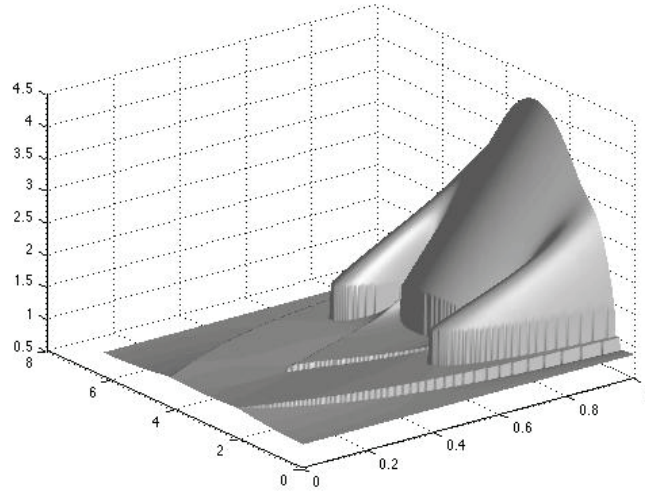
$$(\lambda - (\cos k - i \sin k))[(\cos k + i \sin k)d(1 - \lambda) + (b + d - \lambda)(\lambda - (\cos k + i \sin k))] \quad (4.37)$$

$$+ (1 - \lambda)\lambda\omega(\bar{u}^2 - 2\bar{u} + \frac{2}{3})i \sin k = 0 \quad (4.38)$$

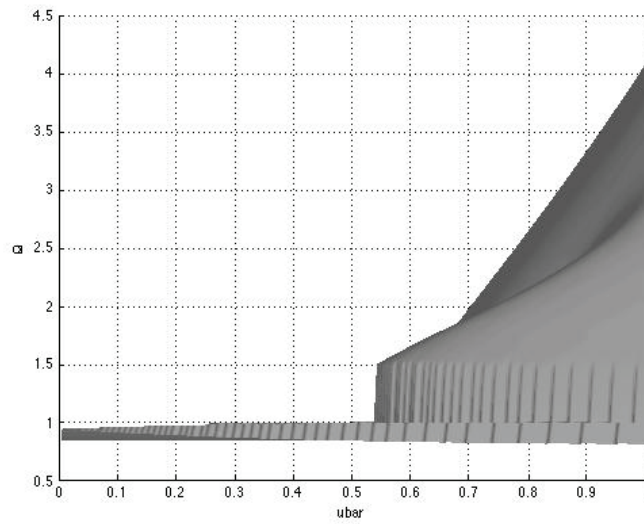
On voit que, si le dernier terme s'annule, $\lambda = (\cos k - i \sin k)$ est une racine de module $(\lambda_r^2 + \lambda_c^2) = 1$, donc égale à la valeur critique de λ . Les valeurs de \bar{u} qui annulent le polynôme $(\bar{u}^2 - 2\bar{u} + \frac{2}{3}) = 0$ sont $\bar{u}_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\bar{u}_2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Donc $\lambda = (\cos k - i \sin k)$ est une racine pour $u_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $u_2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$.

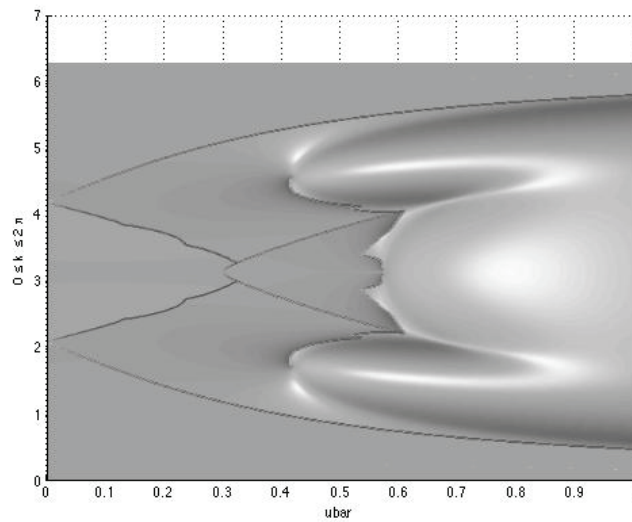
Nous retrouvons sur la figure *c* de (4.1), pour $\bar{u} < 1$, la première solution $\bar{u}_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.42275$ dans l'analyse non linéaire comme limite supérieure d'instabilité sur l'axe des abscisses \bar{u} . Nous verrons cette solution également apparaître dans l'étude non linéaire en ondes résonantes. Sur la même figure *c* la troisième solution $u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ apparaît également.



(a) Vue 3D des valeurs propres en fonction de k et de \bar{u}



(b) Vue de profil montrant les valeurs pour u_1 et u_2



(c) Vue de dessus montrant les valeurs pour u_1 et u_2

FIGURE 4.1 – Calcul des valeurs propres du polynôme du troisième ordre (4.30) en fonction de \bar{u} et de k ,
 $0 < \bar{u} < 1$ et $0 < k < 2\pi$

4.3 Analyse non linéaire en ondes résonantes

Nous repartons de l'équation complète non linéaire et cherchons des solutions exactes consistant en une superposition de modes. Ceux ci sont choisis de telle façon à inclure les harmoniques qui ferment le système. Nous examinerons la solution à 1 mode $2\pi/3$ et à 2 modes $\pi/2$ et π . Nous débuterons cette analyse par la problématique de l'initialisation.

4.3.1 Initialisation

Les cartes d'instabilité sont le reflet des instabilités numériques portant sur l'énergie de la perturbation, laquelle énergie est une fonction du carré de la vitesse de la perturbation. L'axe des abscisses \bar{u} représente l'écoulement uniforme constant et celui des ordonnées, un paramètre caractéristique de l'initialisation σ .

Avec l'équation de Boltzmann, les paramètres d'entrée et de sortie du système d'équations, sont les $h_l(0, n)$ et $h_l(m, n)$ et plusieurs possibilités s'offrent à nous. Sans faire une analyse exhaustive, nous avons examiné celles physiquement acceptables qui correspondent à des cartes d'instabilité différentes. Plusieurs solutions sont possibles :

- soit initialiser directement les $h_l(0, n)$, qui sont des paramètres physiques difficilement appréciables (fonctions de distribution discrétisées en vitesse),
- soit initialiser en vitesse $u'(0, n)$ et en déduire l'initialisation en $h_l(0, n)$,
- soit initialiser à partir des fonctions d'équilibre f_l^{eq} avec la même remarque sur l'estimation physique de ce paramètre.

On a noté également et on le retrouvera dans les cartes, que l'analyse linéaire est faite sur les $h_l(m, n)$. Nous avons calculé toutes les cartes d'instabilité avec ces différentes initialisations, en faisant varier \bar{u} , σ et ω .

On a considéré, que si $\sum_n (u'(t, n))^2 \leq 10^6$ en 2000 itérations temporelles, le point représentatif est considéré comme stable. Il est représenté en blanc sur la carte, dans le cas contraire il est en noir.

L'instabilité se produit très rapidement, en général quelques centaines de pas temporels sont suffisants pour déclencher l'instabilité.

4.3.2 Analyse non linéaire sur le mode résonant $2\pi/3$

On pose :

$$h_l(m, n) = A_l(m)e^{ni\frac{2\pi}{3}} + A_l^*(m)e^{-ni\frac{2\pi}{3}} \quad (4.39)$$

Les paramètres étoilés $A_l^*(m)$ sont les conjugués de ce paramètre $A_l(m)$. On cherche $A_l(m+1, n+c_l)$ tel que :

$$h_l(m+1, n+c_l) = A_l(m+1)e^{i(n+c_l)\frac{2\pi}{3}} + A_l^*(m+1)e^{-i(n+c_l)\frac{2\pi}{3}} \quad (4.40)$$

On remplace ces 2 équations dans (4.12). On assure la fermeture du système, par les égalités suivantes :

$$e^{in\frac{2\pi}{3}} \times e^{in\frac{2\pi}{3}} = e^{-in\frac{2\pi}{3}} \quad (4.41)$$

$$e^{-in\frac{2\pi}{3}} \times e^{-in\frac{2\pi}{3}} = e^{in\frac{2\pi}{3}} \quad (4.42)$$

$$(4.43)$$

Nous avons dû trouver un artifice pour assurer la fermeture du système sur le mode primaire pour les produits croisés égaux à 1, comme :

$$e^{in\frac{2\pi}{3}} \times e^{-in\frac{2\pi}{3}} = 1 \quad (4.44)$$

Nous avons donc écrit les égalités suivantes :

$$1 = p(n)(e^{in\frac{2\pi}{3}} + e^{-in\frac{2\pi}{3}}) \quad (4.45)$$

avec $p(1, 2) = -1$ et $p(3) = \frac{1}{2}$.

Ainsi le système est complètement fermé sur les modes $\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$.

Cette méthode a été reconduite pour les solutions résonantes à 2 modes.

Soit l'équation (4.12) réduite au même dénominateur commun :

$$(\sum h_j(m, n) + \bar{\rho}) = (A_l(m, n)e^{ni\frac{2\pi}{3}} + A_l^*(m, n)e^{-ni\frac{2\pi}{3}} + \rho) \quad (4.46)$$

Nous développons cette équation avec la simplification d'écriture suivante : $\sum A_j(m, n) = \sum A_j$:

$$\begin{aligned} & (A_l(m+1)e^{(n+c_l)i\frac{2\pi}{3}} + A_l^*(m+1)e^{-(n+c_l)i\frac{2\pi}{3}}) \times (\sum_j A_j e^{ni\frac{2\pi}{3}} + \sum_j A_j^* e^{-ni\frac{2\pi}{3}} + \rho) \\ &= (1 - \omega)(A_l e^{ni\frac{2\pi}{3}} + A_l^* e^{-ni\frac{2\pi}{3}}) \times (\sum_j A_j e^{ni\frac{2\pi}{3}} + \sum_j A_j^* e^{-ni\frac{2\pi}{3}} + \rho) \\ &+ \omega(\sum_j (\alpha_l + \beta_l c_j)(A_j e^{ni\frac{2\pi}{3}} + A_j^* e^{-ni\frac{2\pi}{3}}) - \gamma_l \bar{\rho} \bar{u}^2) \times (\sum_j A_j e^{ni\frac{2\pi}{3}} + \sum_j A_j^* e^{-ni\frac{2\pi}{3}} + \rho) \\ &+ \omega \gamma_l (\sum_j c_j (A_j e^{ni\frac{2\pi}{3}} + A_j^* e^{-ni\frac{2\pi}{3}}) + \bar{\rho} \bar{u})^2 \quad (4.47) \end{aligned}$$

Nous extrairons le terme en $e^{ni\frac{2\pi}{3}}$ et le terme conjugué en $e^{-ni\frac{2\pi}{3}}$.

On définira α_{lj} par $(\alpha_l + \beta_l c_j)$. Nous obtiendrons 2 équations en $A_l(m+1) = X_l(m+1) + iY_l(m+1)$ et $A_l^*(m+1) = X_l(m+1) - iY_l(m+1)$ que nous additionnons puis retranchons, pour obtenir les deux équations suivantes en $X_l(m+1)$ et $Y_l(m+1)$ (4.48) et (4.49), pour chaque valeur de l et de n à travers le terme p(n).

– Première équation :

$$\begin{aligned}
& X_l(m+1) \left[\cos\left(\frac{2\pi c_l}{3}\right) \left(\rho + \left(\sum_j X_j \right) (1+2p(n)) \right) - \sin\left(\frac{2\pi c_l}{3}\right) \left(\sum_j Y_j \right) (1-2p(n)) \right] \\
& - Y_l(m+1) \left[\sin\left(\frac{2\pi c_l}{3}\right) \left(\rho + \left(\sum_j X_j \right) (1+2p(n)) \right) + \cos\left(\frac{2\pi c_l}{3}\right) \left(\sum_j Y_j \right) (1-2p(n)) \right] \\
& = \left[\left(\rho + \sum_j X_j \right) (1+2p(n)) \right] (X_l(1-\omega) + \omega \sum_j \alpha_{lj} X_j) \\
& - \left[(1-2p(n)) \sum_j Y_j \right] ((1-\omega) Y_l + \omega \sum_j \alpha_{lj} Y_j) \\
& + \omega \gamma_l \left[\sum_j c_j X_j (2\rho \bar{u} + (1+2p(n)) \sum_j c_j X_j) \right. \\
& \quad \left. - (1-2p(n)) \left(\sum_j c_j Y_j \right)^2 - \bar{\rho} \bar{u}^2 \left(\sum_j X_j \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.48}$$

– Seconde équation :

$$\begin{aligned}
& X_l(m+1) \left[\sin\left(\frac{2\pi c_l}{3}\right) \left(\rho - \left(\sum_j X_j \right) \right) - \cos\left(\frac{2\pi c_l}{3}\right) \left(\sum_j Y_j \right) \right] \\
& + Y_l(m+1) \left[\cos\left(\frac{2\pi c_l}{3}\right) \left(\rho - \left(\sum_j X_j \right) \right) + \sin\left(\frac{2\pi c_l}{3}\right) \left(\sum_j Y_j \right) \right] \\
& = \left[\rho - \sum_j X_j \right] (Y_l(1-\omega) + \omega \sum_j \alpha_{lj} Y_j) - \left[\sum_j Y_j \right] ((1-\omega) X_l + \omega \sum_j \alpha_{lj} X_j) \\
& + \omega \gamma_l \left[2 \left(\sum_j c_j Y_j \right) \left(- \sum_j c_j X_j + \rho \bar{u} \right) - \bar{\rho} \bar{u}^2 \left(\sum_j Y_j \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.49}$$

On a ainsi 6 systèmes d'équations à résoudre pour obtenir $h_l(m+1, n+c_l)$ pour $l=1,3$ et $n=1,2$ et $n=3$. On obtiendra $h_l(m+1, n)$ par transport en c_l sur la période de 2π donc, avec $h(m, 4) = h(m, 1+2\pi)$, tableau 4.1.

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
$m+1$	$h_1(m+1, 1)$	$h_1(m+1, 2)$	$h_1(m+1, 3)$
	$h_2(m+1, 1)$	$h_2(m+1, 2)$	$h_2(m+1, 3)$
	$h_3(m+1, 1)$	$h_3(m+1, 2)$	$h_3(m+1, 3)$
m	$h_1(m, 1)$	$h_1(m, 2)$	$h_1(m, 3)$
	$h_2(m, 1)$	$h_2(m, 2)$	$h_2(m, 3)$
	$h_3(m, 1)$	$h_3(m, 2)$	$h_3(m, 3)$

TABLE 4.1 – Transport entre les composantes $h_l(m, n)$ et $h_l(m+1, n+c_l)$ pour $n = 1, 3$

Initialisation sur $h_l(0, n)$

On doit donc initialiser les amplitudes $A_l(0) = X_l(0) + iY_l(0)$.

$$h_l(0, n) = A_l(0)e^{2in\pi/3} + A_l^*(0)e^{-2in\pi/3} \quad (4.50)$$

On reprendra le modèle d'initialisation utilisé pour l'équation de Burgers :

$$h_l(0, n) = \sigma_l((1+i)e^{2in\pi/3} + (1-i)e^{-2in\pi/3}) \quad (4.51)$$

Suivant les valeurs de σ_l pour $l = 1, 2, 3$, on favorise différentes initialisations physiques :

- $a_1 \cdot \sigma_l = \sigma \forall l$ correspond à $(\rho u)' = \sum_l c_l h_l(0, n) = 0$ et $(\rho)' = \sum_l h_l(0, n) \neq 0$.
- $a_2 \cdot \sigma_1 = 0, \sigma_2 = -\sigma_3 = \sigma$ correspond à $(\rho u)' = \sum_l c_l h_l(0, n) \neq 0$ et $(\rho)' = \sum_l h_l(0, n) = 0$.
- $a_3 \cdot \sigma_1 = \sigma_2 = -\sigma_3 = \sigma$ correspond à $(\rho u)' = \sum_l c_l h_l(0, n) \neq 0$ et $(\rho)' = \sum_l h_l(0, n) \neq 0$.

Examinons chacun de ces 3 cas :

a_1 On a :

$$\sum_l h_l(0, n) = 3\sigma[(1+i)e^{2in\pi/3} + (1-i)e^{-2in\pi/3}] \quad (4.52)$$

Le crochet [] vaut :

$$[] = 2(\cos 2n\pi/3 - \sin 2n\pi/3) \quad (4.53)$$

$$\text{soit pour } n = 1, [] = -(1 + \sqrt{3}) \quad (4.54)$$

$$n = 2, [] = (-1 + \sqrt{3}) \quad (4.55)$$

$$n = 3, [] = 2 \quad (4.56)$$

On regardera l'influence de ces initialisations de $h_l(0, n)$ sur $u'(0, n)$. On peut calculer les valeurs de $h_l(0, n)$ en passant de l'initialisation de u' à celles de h_l de la manière suivante :

$$\rho u = (\bar{\rho} + \rho')(\bar{u} + u') = (\bar{\rho}\bar{u} + (\rho u)') \quad (4.57)$$

$$\rho'(\bar{u} + u') + \bar{\rho}u' = (\rho u)' \quad (4.58)$$

Soit :

$$u'(\sum_j h_j + \bar{\rho}) = (\sum_j c_j h_j - \bar{u} \sum_j h_j) \quad (4.59)$$

Soit pour l'initialisation :

$$u'(0, n) = \frac{\sum_l c_l h_l(0, n) - \bar{u} \sum_l h_l(0, n)}{\bar{\rho} + \sum_l h_l(0, n)} \quad (4.60)$$

Cette initialisation dépend de \bar{u} , où on a pris $\bar{\rho} = 1$.

$$u'(0, n) = \frac{-\bar{u} \sum_l h_l(0, n)}{1 + \sum_l h_l(0, n)} \quad (4.61)$$

On peut également examiner le paramètre E_m défini par $E_m = |u'(0, n)|_{max}$ pour $n = 1, J$ ici $n = 1, 3$. Dans ce cas :

$$E_m = |u'(0, n)|_{max} = \frac{3\bar{u}(1 + \sqrt{3})}{1 - (1 + \sqrt{3})} = \bar{u}(3 + \sqrt{3}) \quad (4.62)$$

On obtient, pour cette initialisation avec $\rho' = 0$, la figure suivante (4.2) :

(On simplifiera les notations des figures en écrivant AAA pour $A_1(0) = A_2(0) = A_3(0) = A = \sigma(1 + i)$, 0A – A pour $A_1(0) = 0, A_2(0) = -A_3(0) = A = \sigma(1 + i)$, AA – A pour $A_1(0) = A_2(0) = -A_3(0) = A = \sigma(1 + i)$).

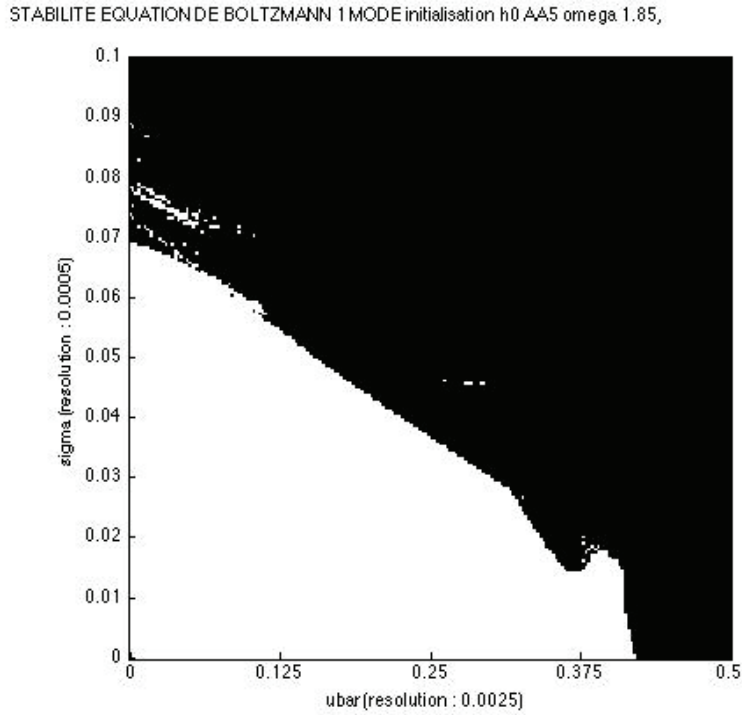


FIGURE 4.2 – Carte de stabilité pour 1 mode avec initialisation (a1=AAA) sur $h_l(0, n)$, $\bar{u} = [0, 0.5]$, $\sigma = [0, 0.1]$, $\omega = 1.85$, $J = 3$, $t = 2000\Delta t$

a_2 On a :

$$u'(0, n) = \sum_l c_l h_l(0, n) \quad (4.63)$$

Dans ce cas, $u'(0, n)$ ne dépend pas de \bar{u} et $E_m = |u'(0, n)|_{max} = 2\sigma(1 + \sqrt{3})$. On obtient, pour cette initialisation avec $\rho u' = 0$, la figure suivante (4.3).

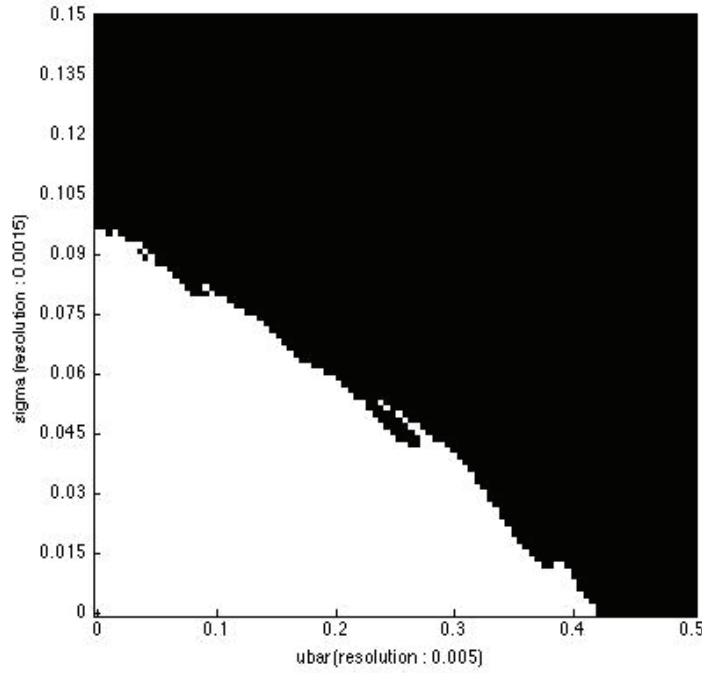


FIGURE 4.3 – Carte de stabilité pour 1 mode avec initialisation (a2=0A-A) sur $h_l(0, n)$, $\bar{u} = [0, 0.5]$, $\sigma = [0, 0.15]$, $\omega = 1.85$, $J = 3$, $t = 2000\Delta t$

a_3 On a pour ce dernier cas :

$$u'(0, n) = \frac{\sum_l c_l h_l(0, n) - \bar{u} \sum_l h_l(0, n)}{\bar{\rho} + \sum_l h_l(0, n)}, u'(0, n) \text{ dépend de } \bar{u} \quad (4.64)$$

$$E_m = |u'(0, n)|_{max} = \frac{\sigma(\bar{u} - 2)(1 + \sqrt{3})}{1 - \sigma(1 + \sqrt{3})} \quad (4.65)$$

On obtient pour cette initialisation où interviennent ρ' et $\rho u'$, la figure suivante (4.4).

L'examen de ces 3 figures (4.2), (4.3) et (4.4). amène les commentaires suivants :

- L'instabilité débute pour la première racine linéaire $\bar{u} = 1 - 1/\sqrt{3}$.
- La valeur de l'amplitude initiale σ au dessus de laquelle les solutions sont instables est faible : $[0.07 - 0.097]$.

Initialisation sur $u'(0, n)$

On a dit précédemment que les calculs en temps sont effectués sur la variable $h_l(m, n)$ mais que l'instabilité est vérifiée sur l'énergie $\sum_n (u'(m, n))^2$.

Dans l'analyse du mode résonant $2\pi/3$ pour l'équation de Burgers, comme on l'a vu au chapitre 2, l'initialisation (et pour cause) est faite sur $u'(0, n)$.

On peut calculer les valeurs de $h_l(0, n)$ en passant de l'initialisation de u' à celles de h_l :

$$u'(0, n) = \sigma((1 + i)e^{2in\pi/3} + (1 - i)e^{-2in\pi/3}) \quad (4.66)$$

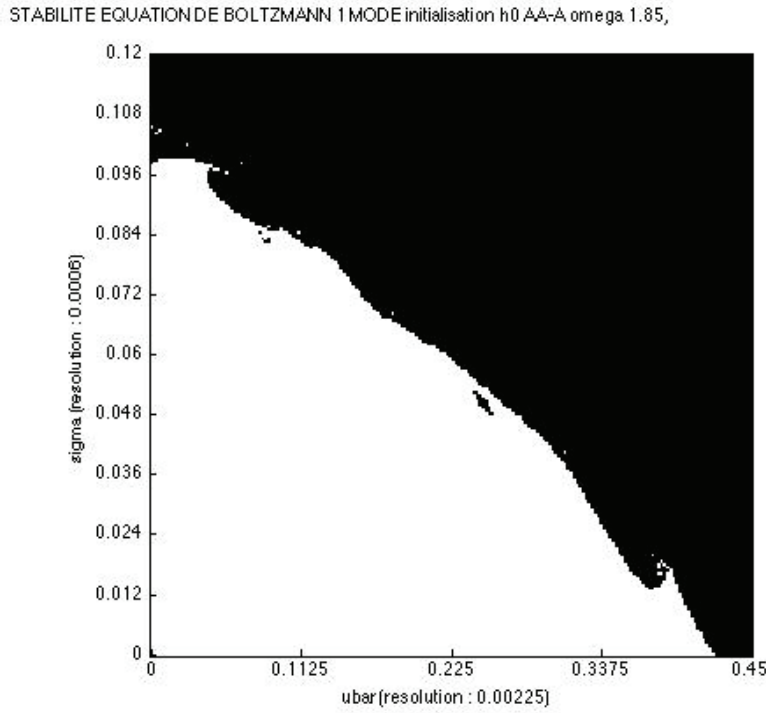


FIGURE 4.4 – Carte de stabilité pour 1 mode avec initialisation (a3=AA-A) sur $h_l(0, n)$, $\bar{u} = [0, 0.45]$, $\sigma = [0, 0.12]$, $\omega = 1.85$, $J = 3$, $t = 2000\Delta t$

$$\sigma((1+i)e^{2in\pi/3} + (1-i)e^{-2in\pi/3}) = \left[\frac{\sum_l c_l h_l(0, n) - \bar{u} \sum_l h_l(0, n)}{1 + \sum_l h_l(0, n)} \right] \quad (4.67)$$

Le calcul des $h_l(0, n)$ consiste en celui des 6 inconnues X_l et Y_l avec $h_l(0, n) = X_l + iY_l$. Nous verrons, en reprenant des hypothèses plausibles, comparatives avec le paragraphe précédent que ce calcul reste possible malgré le nombre d'équations inférieur au nombre d'inconnues.

On pose donc :

$$h_l(0, n) = (X_l + iY_l)e^{2in\pi/3} + (X_l - iY_l)e^{-2in\pi/3} \quad (4.68)$$

On développe l'équation (4.67) :

$$\begin{aligned} &\sigma((1+i)e^{2in\pi/3} + (1-i)e^{-2in\pi/3})(1 + \sum_j A_j(0, n)e^{2in\pi/3} + \sum_j A_j^*(0, n)e^{-2in\pi/3}) = \\ &\sum_j c_j A_j(0, n)e^{2in\pi/3} + \sum_j c_j A_j^*(0, n)e^{-2in\pi/3} - \bar{u}(\sum_j A_j(0, n)e^{2in\pi/3} + \sum_j A_j^*(0, n)e^{-2in\pi/3}) \end{aligned} \quad (4.69)$$

On assure la fermeture du système. Les contributions à $e^{in\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{-in\frac{2\pi}{3}}$ donnent l'équation suivante et sa conjuguée :

$$\begin{aligned} &\sigma((1+i) + (1-i) \sum_j A_j^*(0, n) + p(n)((1+i) \sum_j A_j(0, n) + (1-i) \sum_j A_j(0, n))) = \\ &(\sum_j c_j A_j(0, n) - \bar{u}(\sum_j A_j(0, n))) \end{aligned} \quad (4.70)$$

Nous devons faire plusieurs hypothèses simplificatrices :

Hypothèse 1 : l'initialisation sur les $A_j(0, n)$ est indépendante de n , soit $A_j(0, n) = A_j(0)$.
On obtient les équations suivantes :

$$(1+i) \sum_j A_j(0) + (1-i) \sum_j A_j(0) = 0 \text{ soit } \sum_j X_j + \sum_j Y_j = 0 \quad (4.71)$$

$$\sigma((1+i) + (1-i) \sum_j A_j^*(0)) = (\sum_j c_j A_j(0) - \bar{u}(\sum_j A_j(0))) \quad (4.72)$$

Hypothèse 2 : Suivant a3 on prend $A_1 = A_2 = -A_3$ (on ne fait pas d'hypothèse sur ρ' et $\rho u'$).

La première équation de l'hypothèse 1 devient : $X_1 + Y_1 = 0$.

La seconde équation, en séparant les parties réelles et imaginaires donne :

$$\sigma(1 + X_1 - Y_1) = (2X_2 - \bar{u}X_1) \quad (4.73)$$

$$\sigma(1 - X_1 - Y_1) = (2Y_2 - \bar{u}Y_1) \quad (4.74)$$

Hypothèse 3 : on posera $X_1 = 1$.

On déduit le résultat suivant :

$$X_1 = 1, Y_1 = -1 \quad (4.75)$$

$$X_2 = 0.5(\bar{u} + \sigma(\bar{\rho} + 2), Y_2 = 0.5(-\bar{u} + \sigma\bar{\rho}) \quad (4.76)$$

On écrira alors l'initialisation sur $h_l(0, n)$:

$$h_1(0, n) = ((1-i)e^{2n\pi/3} + (1+i)e^{-2n\pi/3}) \quad (4.77)$$

$$h_2(0, n) = -h_3(0, n) = 0.5((\bar{u} + 3\sigma) + i(-\bar{u} + \sigma\bar{\rho}))e^{2n\pi/3} + c.c. \quad (4.78)$$

On obtient pour cette initialisation sur $u'(0, n)$ la figure suivante (4.5) :

Pour cette initialisation particulière :

- L'instabilité débute pour \bar{u} à une valeur [0.14] très inférieure à la première racine linéaire $\bar{u} = 1 - 1/\sqrt{3}$, obtenue pour les premières initialisations précédentes.
- La valeur de l'amplitude initiale σ au dessus de laquelle les solutions sont instables est aussi faible : [0.07].

$$E_m = |u'(0, n)|_{max} = \sigma(1 + \sqrt{3}) \quad (4.79)$$

Initialisation sur $h_l(0, n) = \text{fonction}(f_l^{eq}, f_l^{\bar{eq}})$

On peut également prendre l'hypothèse d'initialisation proposée dans [23]. Sa justification théorique n'est pas évidente mais on peut considérer, à l'initialisation :

$h_l(1, n) = h_l(0, n)$ qui donne avec :

$$h_l(1, n) = (1 - \omega)h_l(0, n) + \omega(f_l^{eq}(\bar{\rho} + \rho', \bar{u} + u') - f_l^{\bar{eq}}(\bar{\rho}, \bar{u})) \quad (4.80)$$

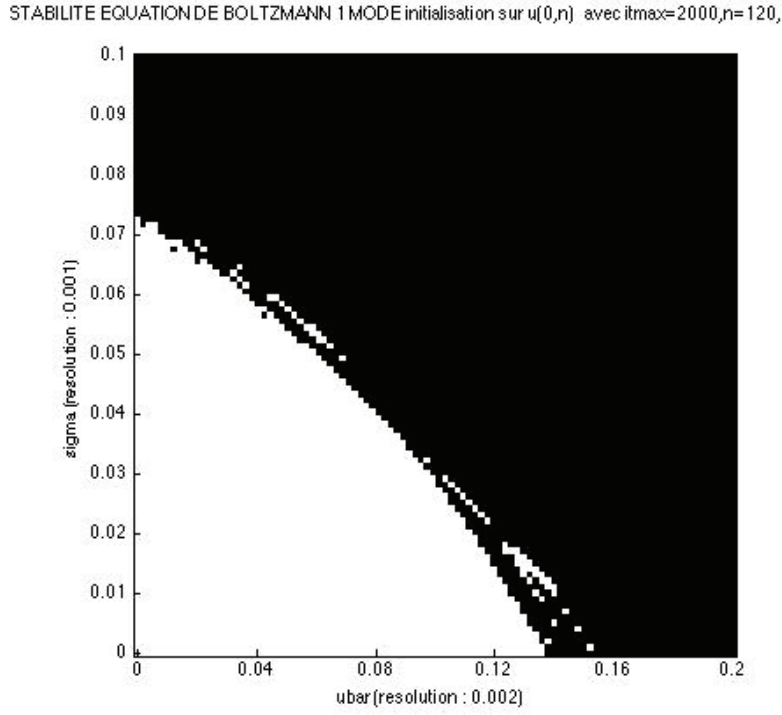


FIGURE 4.5 – Carte de stabilité pour 1 mode avec initialisation sur $u'(0, n)$ de $h_l(0, n)$, $\bar{u} = [0, 0.2]$, $\sigma = [0, 0.1]$, $\omega = 1.85$, $J = 120$, $t = 2000\Delta t$

$$h_l(0, n) = (f_l^{eq}(\bar{\rho} + \rho', \bar{u} + u') - \bar{f}_l^{eq}(\bar{\rho}, \bar{u})) \quad (4.81)$$

On rappelle que :

$$f_l^{eq} = \alpha_l \rho + \beta_l \rho u + \gamma_l \rho u^2 \quad (4.82)$$

Et donc :

$$h_l(0, n) = \alpha_l(\bar{\rho} + \rho') + \beta_l(\bar{\rho} + \rho')(\bar{u} + u') + \gamma_l(\bar{\rho} + \rho')(\bar{u} + u')^2 - \alpha_l \bar{\rho} + \beta_l \bar{\rho} \bar{u} + \gamma_l \bar{\rho} \bar{u}^2 \quad (4.83)$$

En développant on obtient :

$$h_l(0, n) = \rho'(\alpha_l + \beta_l \bar{u} + \gamma_l \bar{u}^2) + u'(\beta_l \bar{\rho}) + 2\gamma_l \bar{\rho} \bar{u} + u'^2(\gamma_l \bar{\rho}) + \rho' u'(\beta_l + 2\gamma_l \bar{u}) + \rho' u'^2(\gamma_l) \quad (4.84)$$

On pose maintenant les hypothèses suivantes sur u' et ρ' :

$$u'(0, n) = \sigma((1 + i)e^{2in\pi/3} + (1 - i)e^{-2in\pi/3}) \quad (4.85)$$

$$\rho' = 0 \quad (4.86)$$

On reporte ces valeurs dans l'équation (4.84) :

$$h_l(0, n) = A_l e^{2in\pi/3} + A_l^* e^{-2in\pi/3} = u'(\beta_l \bar{\rho} + 2\gamma_l \bar{\rho} \bar{u}) + u'^2(\gamma_l \bar{\rho}) \quad (4.87)$$

On développe u'^2 :

$$u'^2 = \sigma^2(-2ie^{2in\pi/3} + 2ie^{-2in\pi/3} + 4p(n)(e^{2in\pi/3} + e^{-2in\pi/3})) \quad (4.88)$$

On sépare les contributions en $e^{2in\pi/3}$ et $e^{-2in\pi/3}$ et on obtient les expressions de $A_l = X_l + Y_l$.

$$X_l(0, n) = \sigma(\bar{\rho}\beta_l + 2\gamma_l\bar{\rho}\bar{u}) + p(n)(4\sigma^2\gamma_l\bar{\rho}) \quad (4.89)$$

$$Y_l(0, n) = \sigma(\bar{\rho}\beta_l + 2\gamma_l\bar{\rho}\bar{u}) - (2\sigma^2\gamma_l\bar{\rho}) \quad (4.90)$$

Soit pour $\bar{\rho} = 1$:

$$h_l(0, n) = [\sigma(\beta_l + 2\gamma_l\bar{u}) + 4p(n)\sigma^2\gamma_l] + i[\sigma(\beta_l + 2\gamma_l\bar{u}) - 2\sigma^2\gamma_l] \quad (4.91)$$

On obtient la figure suivante avec initialisation à partir des fonctions d'équilibre (4.6) :

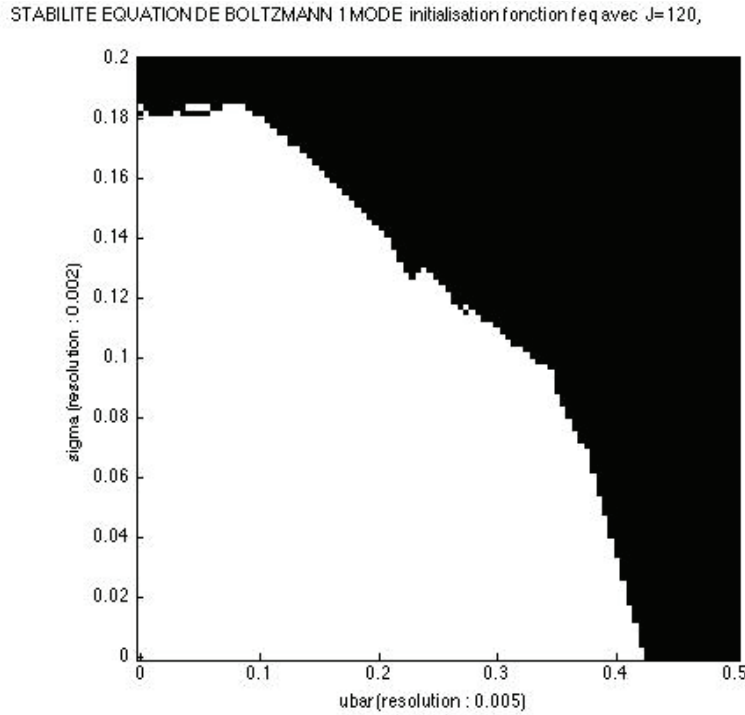


FIGURE 4.6 – Carte de stabilité pour 1 mode avec initialisation à partir des fonctions d'équilibre de $h_l(0, n)$,

$\bar{u} = [0, 0.5]$, $\sigma = [0, 0.2]$, $\omega = 1.85$, $J = 120$, $t = 2000\Delta t$

Pour cette initialisation avec les fonctions d'équilibre :

- L'instabilité débute pour \bar{u} à la première racine linéaire $\bar{u} = 1 - 1/\sqrt{3}$, comme pour les premières initialisations précédentes.
- La valeur de l'amplitude initiale σ au dessus de laquelle les solutions sont instables est plus élevée : $[0.18]$.

$$E_m = |u'(0, n)|_{max} = \sigma(1 + \sqrt{3}) \quad (4.92)$$

Initialisation sur $u'(0, n)$ et variation de la viscosité à travers ω

On a donc examiné avec cette initialisation l'influence de la réduction de viscosité $\omega = 1.9$ et $\omega = 1.99$. On rappelle que :

$$\frac{1}{\tau_g} = \omega = \frac{1}{3\nu + \frac{1}{2}} \text{ avec } \nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (4.93)$$

La carte d'instabilité (4.7) montre une réduction progressive de la zone blanche de stabilité avec la réduction de la viscosité :

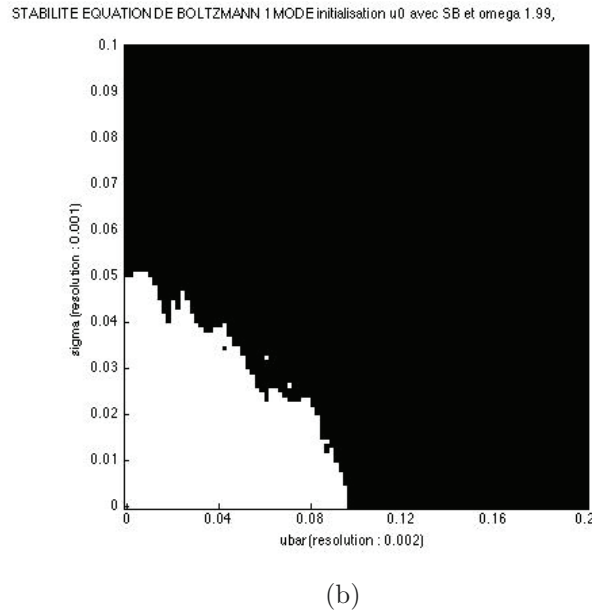
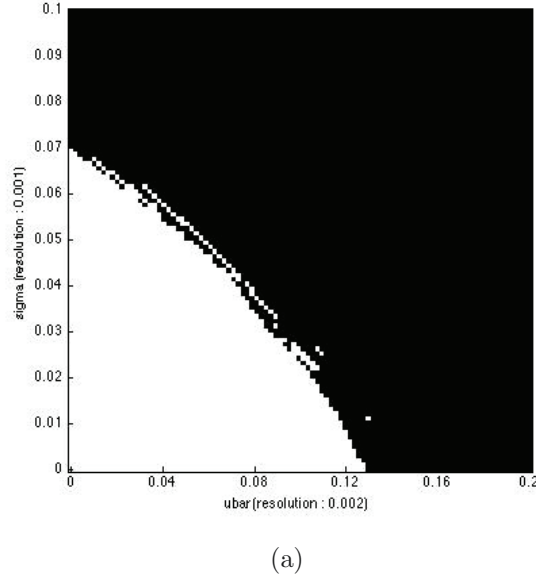


FIGURE 4.7 – Carte de stabilité pour 1 mode avec initialisation sur $u'(0, n)$ de $h_l(0, n)$, $\bar{u} = [0, 0.2]$, $\sigma = [0, 0.1]$, $\omega = 1.9$ et 1.99 , $J = 120$, $t = 2000\Delta t$

L'influence de la viscosité se traduit par :

- Une réduction très faible de la zone de stabilité pour $\omega = 1.9$.
- Une réduction sensible de la zone de stabilité pour $\omega = 1.99$.

4.3.3 Ondes résonantes sur 2 modes

Nous étudierons plus particulièrement cette configuration considérée comme la plus instable avec les initialisations du même type que celles utilisées précédemment.

On connaît :

$$h_l(m, n) = A_l(m)e^{in\frac{\pi}{2}} + A_l^*(m)e^{-in\frac{\pi}{2}} + B_l(m)e^{in\pi} \text{ avec } B_l(m) \text{ réel.} \quad (4.94)$$

On cherche $A_l(m+1, n+c_l)$ et $B_l(m+1, n+c_l)$, tel que :

$$h_l(m+1, n+c_l) = A_l(m+1)e^{i(n+c_l)\frac{\pi}{2}} + A_l^*(m+1)e^{-i(n+c_l)\frac{\pi}{2}} + B_l(m+1)e^{i(n+c_l)\pi} \quad (4.95)$$

On substitue cette solution à 2 modes dans l'équation (4.12).

On égale les contributions en $e^{in\frac{\pi}{2}}$, en $e^{-in\frac{\pi}{2}}$ et en $e^{in\pi}$, ce qui permet d'obtenir 3 équations pour déterminer $A_l(m+1)$, $A_l^*(m+1)$ et $B_l(m+1)$.

On assure la fermeture du système sur ces modes en considérant que pour les produits croisés dont le résultat est 1, on prendra $1 = (-1)^n e^{in\pi}$, on fermera ainsi complètement le système sur les modes $\pi/2, -\pi/2$ et π :

Soit l'équation (4.12) réduite au même dénominateur :

$$(\sum_j h_j(m, n) + \bar{\rho}) = (\sum_j A_j(m)e^{in\frac{\pi}{2}} + \sum_j A_j^*(m)e^{-in\frac{\pi}{2}} + \sum_j B_j(m)e^{in\pi} + \bar{\rho}) \quad (4.96)$$

Nous développerons, en simplifiant les écritures de $\sum A_j(m) = \sum A_j$ et $\sum B_j(m) = \sum B_j$, et en reportant, comme précédemment, $h_l(m+1, n+c_l)$ de (4.95) et $h_l(m, n)$ de (4.94) dans (4.12).

$$[A_l(m+1)e^{i(n+c_l)\frac{\pi}{2}} + A_l^*(m+1)e^{-i(n+c_l)\frac{\pi}{2}} + B_l(m+1)e^{i(n+c_l)\pi}] \quad (4.97)$$

$$\times [\sum_j (A_j e^{in\frac{\pi}{2}} + A_j^* e^{-in\frac{\pi}{2}} + B_j e^{in\pi}) + \bar{\rho}] = \quad (4.98)$$

$$(1-\omega)[A_l e^{in\frac{\pi}{2}} + A_l^* e^{-in\frac{\pi}{2}} + B_l e^{in\pi}] \quad (4.99)$$

$$\times [\sum_j (A_j e^{in\frac{\pi}{2}} + A_j^* e^{-in\frac{\pi}{2}} + B_j e^{in\pi}) + \bar{\rho}] \quad (4.100)$$

$$+\omega[\sum_j (\alpha_l + \beta_l c_j)(A_j e^{in\frac{\pi}{2}} + A_j^* e^{-in\frac{\pi}{2}} + B_j e^{in\pi}) - \gamma_l \bar{\rho} \bar{u}^2] \quad (4.101)$$

$$\times [\sum_j (A_j e^{in\frac{\pi}{2}} + A_j^* e^{-in\frac{\pi}{2}} + B_j e^{in\pi}) + \bar{\rho}] \quad (4.102)$$

$$+\omega\gamma_l[\sum_j c_j (A_j e^{in\frac{\pi}{2}} + A_j^* e^{-in\frac{\pi}{2}} + B_j e^{in\pi}) + \bar{\rho} \bar{u}]^2 \quad (4.103)$$

Nous ne développerons pas ici les différents calculs et équations, nous présenterons à titre d'exemple seulement, les systèmes d'équations à résoudre. D'abord, nous simplifierons $e^{ic_l\frac{\pi}{2}}$, $e^{-ic_l\frac{\pi}{2}}$, $e^{ic_l\pi}$ en écrivant :

$$e^{ic_l \frac{\pi}{2}} = (i)^{c_l} \quad e^{-ic_l \frac{\pi}{2}} = (-i)^{c_l} \quad e^{ic_l \pi} = (-1)^{c_l} \quad (4.104)$$

- La première équation (facteur de $e^{in \frac{\pi}{2}}$) s'écrit :

$$\begin{aligned} (i)^{c_l} \bar{\rho} A_l(m+1) + (-i)^{c_l} A_l^*(m+1) \sum_j B_j + (-1)^{c_l} B_l(m+1) \sum_j A_j^* = \\ + (1-\omega) [B_l \sum_j A_j^* + A_l^* \sum_j B_j + \bar{\rho} A_l] \\ + \omega [(\sum_j \alpha_{lj} B_j) \sum_j A_j^* + (\sum_j \alpha_{lj} A_j^*) \sum_j B_j + \bar{\rho} \sum_j \alpha_{lj} A_j - \gamma_l \bar{\rho} \bar{u}^2 \sum_j A_j] \\ + 2\omega \gamma_l [(\sum_j c_j A_j^*)(\sum_j c_j B_j) + \bar{\rho} \bar{u} \sum_j c_j A_j] \quad (4.105) \end{aligned}$$

- La seconde équation(facteur de $e^{-in \frac{\pi}{2}}$) est la conjuguée de la première équation.

- La troisième équation (facteur de $e^{in\pi}$) est composée de 2 sous-équations en fonction du signe de $(-1)^n$ égal à 1 ou -1 suivant la parité de n.

$$\begin{aligned} [(i)_l^c A_l(m+1) (\sum_j A_j + (-1)^n \sum_j A_j^*)] + [(i)_l^c A_l(m+1) (\sum_j A_j + (-1)^n \sum_j A_j^*)]^* \\ + (-1)_l^c B_l(m+1) (\bar{\rho} + (-1)^n \sum_j B_j) = \\ (1-\omega) ([A_l (\sum_j A_j + (-1)^n \sum_j A_j^*)] + [A_l (\sum_j A_j + (-1)^n \sum_j A_j^*)]^* + B_l (\bar{\rho} + (-1)^n \sum_j B_j)) \\ + \omega ([\sum_j \alpha_{lj} A_j (\sum_j A_j + (-1)^n \sum_j A_j^*)] + [\sum_j \alpha_{lj} A_j (\sum_j A_j + (-1)^n \sum_j A_j^*)]^*) \\ + \omega (\sum_j \alpha_{lj} B_j (\bar{\rho} + (-1)^n \sum_j B_j) - \gamma_l \bar{\rho} \bar{u}^2 \sum_j B_j \\ + \omega \gamma_l [(\sum_j c_j A_j)^2 + (\sum_j c_j A_j^*)^2 + 2\bar{\rho} \bar{u} \sum_j c_j B_j + \\ (-1)^n (\sum_j c_j B_j)^2 + 2(\sum_j c_j A_j)(\sum_j c_j A_j^*)]) \quad (4.106) \end{aligned}$$

On remarque dans cette équation le facteur $(\sum_j A_j + (-1)^n \sum_j A_j^*)$ qui va prendre des valeurs particulières suivant la parité de n.

Pour n pair, on obtient $(\sum_j A_j + \sum_j A_j^*) = 2 \sum_j X_j$ et les sommes $[f] + [f]^*$ deviendront $4 \sum_j X_j$.

Pour n impair, on obtient $(\sum_j A_j - \sum_j A_j^*) = 2i \sum_j Y_j$ et les sommes $[f] + [f]^*$ deviendront nulles.

On a ainsi, en résolvant les 6 systèmes d'équations, calculé $h_l(m+1, n+c_l)$ pour $l=1, 3$ et $n=1, 3$ impair et $n=2, 4$ pair.

On obtiendra $h_l(m+1, n)$ par transport en c_l sur la période de 2π .

Le tableau suivant (4.2) présente le transport entre les composantes après collision.

On reprendra donc les mêmes types d'initialisation que pour les ondes résonantes à 1 mode.

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
$m + 1$	$h_1(m + 1, 1)$	$h_1(m + 1, 2)$	$h_1(m + 1, 3)$	$h_1(m + 1, 4)$
	$h_2(m + 1, 1)$	$h_2(m + 1, 2)$	$h_2(m + 1, 3)$	$h_2(m + 1, 4)$
	$h_3(m + 1, 1)$	$h_3(m + 1, 2)$	$h_3(m + 1, 3)$	$h_3(m + 1, 4)$
m	$h_1(m, 1)$	$h_1(m, 2)$	$h_1(m, 3)$	$h_1(m, 4)$
	$h_2(m, 1)$	$h_2(m, 2)$	$h_2(m, 3)$	$h_2(m, 4)$
	$h_3(m, 1)$	$h_3(m, 2)$	$h_3(m, 3)$	$h_3(m, 4)$

TABLE 4.2 – Tableau des transports entre les composantes de $h_l(m, n)$ et $h_l(m + 1, n + c_l)$ pour $n=1,4$ **Initialisation sur $h_l(0, n)$**

Dans le cas des 2 modes résonants $\pi/2$ et π , le problème se complexifie, les combinaisons sont plus nombreuses car on doit initialiser 2 composantes : $A_l(0)$ et $B_l(0)$ dans l'équation d'initialisation de $h_l(0, n)$.

$$h_l(0, n) = A_l(0)e^{n\pi/2} + A_l^*(0)e^{-n\pi/2} + B_l(0)e^{n\pi} \quad (4.107)$$

On donnera seulement les résultats, sans développer les différentes étapes de calcul. On doit initialiser :

$$h_l(0, n) = \sigma_l((1 + i)e^{n\pi/2} + (1 - i)e^{-n\pi/2}) + \sigma_l'e^{n\pi} \quad (4.108)$$

On simplifiera en prenant $\sigma_l = \sigma_l'$. On aura les mêmes combinaisons qu'au chapitre précédent, en les reprenant aussi sur B_l .

On simplifiera les écritures de $A_1 = A_2 = A_3 = A = \sigma(1 + i)$, $B_1 = B_2 = B_3 = B = \sigma$ en $AAABBB$.

$b_1 = AAABBB$ L'initialisation s'écrit :

$$h_1(0, n) = h_2(0, n) = h_3(0, n) = \sigma[(1 + i)e^{ni\frac{\pi}{2}} + (1 - i)e^{-ni\frac{\pi}{2}} + 1e^{in\pi}] \quad (4.109)$$

$$\rho'u' = 0, \rho' \neq 0$$

$$\sum_l h_l(0, n) = 3\sigma((1 + i)e^{ni\pi/2} + (1 - i)e^{-ni\pi/2} + e^{n\pi}) \quad (4.110)$$

$$E = |u'(0, n)|_{max} = \left| \frac{9\sigma\bar{u}}{(1 - 9\sigma)} \right| \text{ pour } n = 1, 4 \quad (4.111)$$

On obtient pour cette initialisation la figure suivante (4.8) :

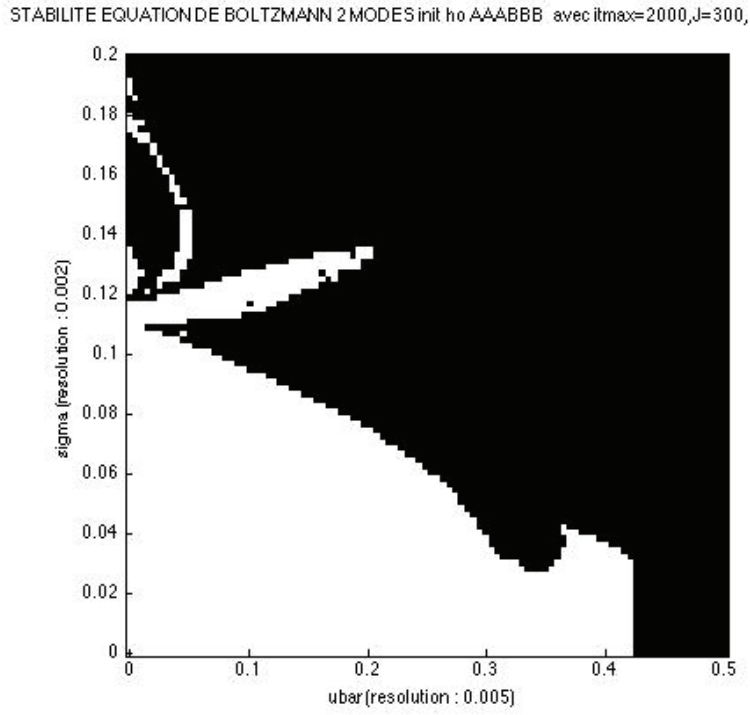


FIGURE 4.8 – Carte de stabilité pour 2 modes avec initialisation ($b_1=AAABBB$) sur $h_l(0, n)$, $\bar{u} = [0, 0.5]$, $\sigma = [0, 0.2]$, $\omega = 1.85$, $J = 300$, $t = 2000\Delta t$

$b_2 = 0A - A0B - B$ L'initialisation s'écrit :

$$h_1(0, n) = 0, h_2(0, n) = -h_3(0, n) = \sigma[(1+i)e^{ni\frac{\pi}{2}} + (1-i)e^{-ni\frac{\pi}{2}} + 1e^{in\pi}] \quad (4.112)$$

$$\rho'u' \neq 0, \rho' = 0.$$

$$\sum_l c_l h_l(0, n) = 2\sigma((1+i)e^{in\pi/2} + (1-i)e^{-in\pi/2} + e^{in\pi}) \quad (4.113)$$

$$E = |u'(0, n)|_{max} = 6\sigma \text{ pour } n = 1, 4 \quad (4.114)$$

On obtient pour cette initialisation la figure (4.9).

$b_3 = AA - ABB - B$ L'initialisation s'écrit :

$$h_1(0, n) = h_2(0, n) = -h_3(0, n) = \sigma[(1+i)e^{ni\frac{\pi}{2}} + (1-i)e^{-ni\frac{\pi}{2}} + 1e^{in\pi}] \quad (4.115)$$

$$\rho'u' \neq 0, \rho' \neq 0$$

$$\sum_l h_l(0, n) = \sigma((1+i)e^{in\pi/2} + (1-i)e^{-in\pi/2} + e^{in\pi}) \quad (4.116)$$

$$\sum_l c_l h_l(0, n) = 2\sigma((1+i)e^{in\pi/2} + (1-i)e^{-in\pi/2} + e^{in\pi}) \quad (4.117)$$

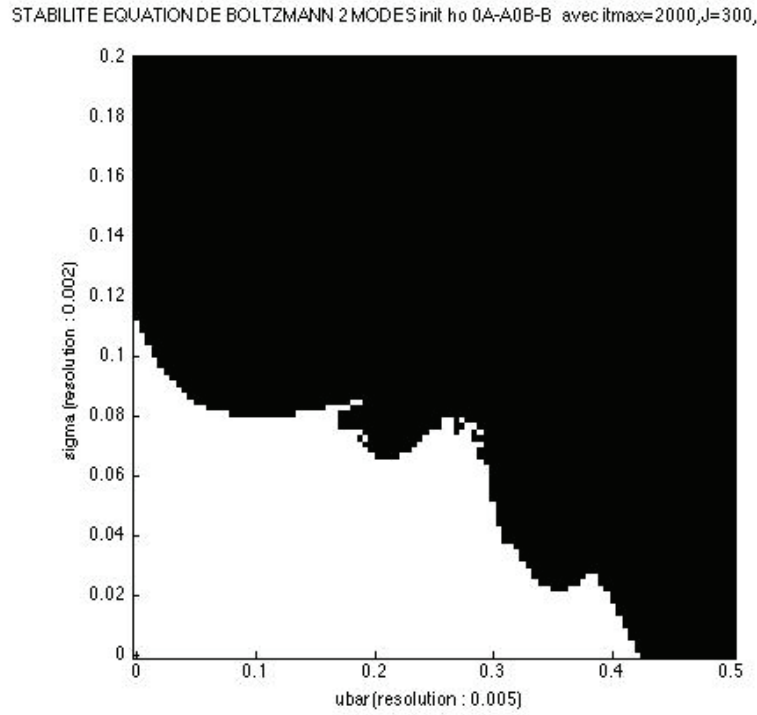


FIGURE 4.9 – Carte de stabilité pour 2 modes avec initialisation ($b_2=0A-A0B-B$) sur $h_l(0, n)$, $\bar{u} = [0, 0.5]$, $\sigma = [0, 0.2]$, $\omega = 1.85$, $J = 300$, $t = 2000\Delta t$

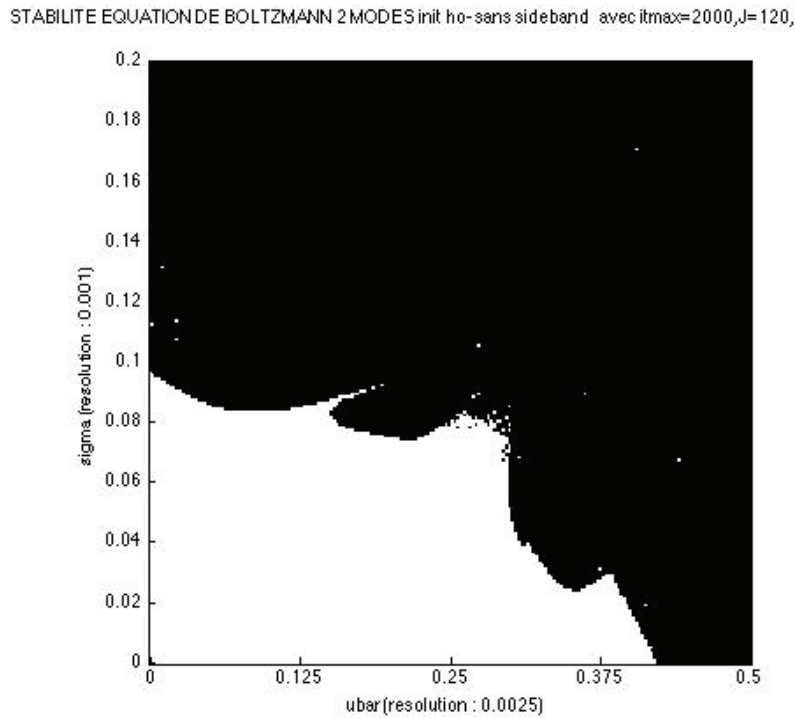


FIGURE 4.10 – Carte de stabilité pour 2 modes avec initialisation ($b_3=AA-ABB-B$) sur $h_l(0, n)$, $\bar{u} = [0, 0.5]$, $\sigma = [0, 0.2]$, $\omega = 1.85$, $J = 120$, $t = 2000\Delta t$

$$E = |u'(0, n)|_{\max} = \left| \frac{3\sigma(2 - \bar{u})}{(1 - 3\sigma)} \right| \text{ pour } n = 1, 4 \quad (4.118)$$

On obtient pour cette initialisation la figure (4.10).

L'examen de ces 3 figures (4.8), (4.9) et (4.10). amène des commentaires peu différents de ceux pour 1 mode résonant :

- L'instabilité débute pour la même première racine linéaire $\bar{u} = 1 - 1/\sqrt{3}$.
- La valeur de l'amplitude initiale σ au dessus de laquelle les solutions sont instables est faible : $[0.1 - 0.11]$ mais toutefois un peu plus élevée que pour 1 mode.
- Le tracé de la zone stable est beaucoup plus accidenté (ou chaotique?) que les tracés réguliers obtenus pour 1 mode

Il est bien évident que de nombreuses autres combinaisons différentes sur σ_l et σ_l' peuvent être obtenues, en particulier pour l'initialisation (b3), les initialisations (b1) et (b2) correspondant à des situations physiquement plus simplistes.

Initialisation sur $u'(0, n)$ pour les modes résonants $\pi/2$ et π

On doit initialiser $h_l(0, n)$ tel que :

$$h_l(0, n) = A_l(0)e^{ni\frac{\pi}{2}} + A_l^*(0)e^{-ni\frac{\pi}{2}} + B_l(0)e^{in\pi} \quad (4.119)$$

Et :

$$u'(0, n) = \sigma_l[(1+i)e^{ni\frac{\pi}{2}} + (1-i)e^{-ni\frac{\pi}{2}} + 1e^{in\pi}] \quad (4.120)$$

On passera de l'initialisation de $h_l(0, n)$ à celle de $u'(0, n)$ comme précédemment à 1 mode, avec des hypothèses supplémentaires à faire. On posera :

$$h_l(0, n) = (X_l + iY_l)e^{ni\frac{\pi}{2}} + (X_l - iY_l)e^{-ni\frac{\pi}{2}} + B_le^{in\pi} \quad (4.121)$$

En remplaçant (4.121) dans (4.59) et en égalant les coefficients de $e^{in\frac{\pi}{2}}$, $e^{-in\frac{\pi}{2}}$ et $e^{in\pi}$, on obtient les 3 équations suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma_l[(1+i) + (1-i) \sum_j B_j + \sum_j A_j^*] &= ((A_2 - A_3) - \bar{u} \sum_j A_j) \\ \sigma_l[(1-i) + (1+i) \sum_j B_j + \sum_j A_j] &= ((A_2^* - A_3^*) - \bar{u} \sum_j A_j^*) \\ \sigma_l[1 + (1+i) \sum_j A_j + (1-i) \sum_j A_j^* + (-1)^n((1-i) \sum_j A_j + (1+i) \sum_j A_j^* + \sum_j B_j)] &= \\ ((B_2 - B_3) - \bar{u} \sum_j B_j) & \end{aligned} \quad (4.122)$$

Ces 3 équations sont insuffisantes pour déterminer les 12 coefficients $A_j = X_j + iY_j$, B_j et σ_j . On posera donc quelques hypothèses supplémentaires "plausibles" :

1. $\sigma_j = \sigma$ pour tout j .
2. le facteur de $(-1)^n$ ne dépend pas de n pour que l'initialisation de A_l, B_l ne dépende pas de n .
3. $A_2 = -A_3$.
4. $B_j = \sigma$ pour tout j .

On réduit ainsi le nombre d' inconnues à déterminer à 4 avec les 3 équations initiales et l'hypothèse 2.

On obtient les coefficients suivants :

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{1}{4}[-(3(\bar{u} + \sigma) + 1) + i(3(\bar{u} - \sigma) + 1)] \\
 A_2 &= -A_3 = \frac{1}{2}[\sigma(1 + 3\sigma) - \frac{1}{4}(\bar{u} + \sigma)(3(\bar{u} + \sigma) + 1)] \\
 &\quad + i[\sigma(1 - 3\sigma) - \frac{1}{4}(-\bar{u} + \sigma)(3(\bar{u} - \sigma) + 1)] \\
 B_1 &= B_2 = B_3 = \sigma
 \end{aligned} \tag{4.123}$$

La carte d'instabilité avec des conditions initiales sur $u'(0, n)$, produite en figure (4.11), amène des commentaires très différents de tous ceux faits précédemment

- L'instabilité débute à une valeur de \bar{u} très faible [0.11].
- La valeur de l'amplitude initiale σ au dessus de laquelle les solutions sont instables est par contre plus élevée : [0.18].
- Le tracé de la zone stable est très régulier ("élégant"), sans accident apparent.
- Un zoom (4.12) sur la pointe autour de $\bar{u} \approx 0.15 - 0.16, \sigma \approx 0.05 - 0.06$, montre que la régularité n'est qu'apparente, sans perdre toutefois son "élégant graphisme chaotique".
- La forme de ce tracé en forme de \supset est très particulière.

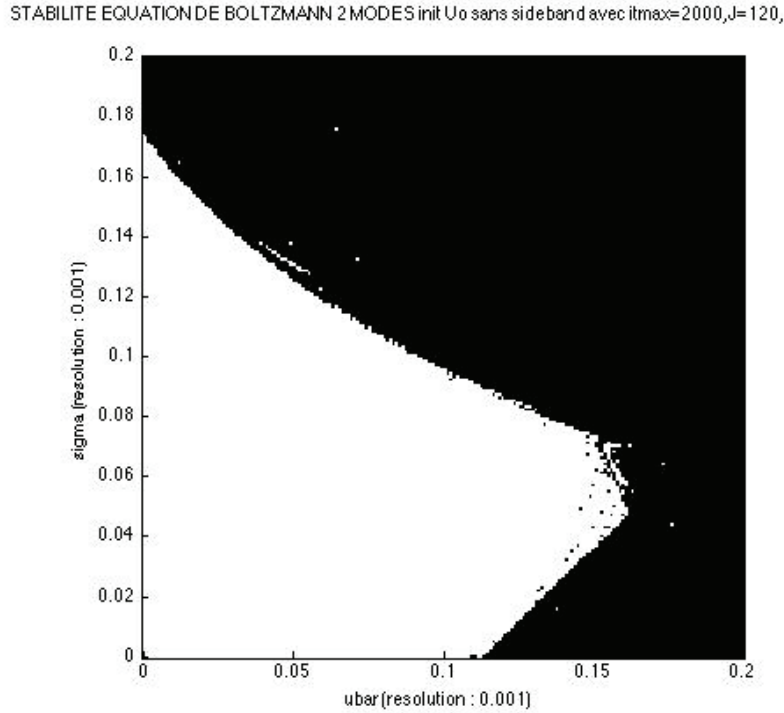


FIGURE 4.11 – Carte de stabilité pour 2 modes avec initialisation sur $u'(0, n)$ de $h_l(0, n)$, $\bar{u} = [0, 0.2], \sigma = [0, 0.2], \omega = 1.85, J = 120, t = 2000\Delta t$

Avec :

$$E = |u'(0, n)|_{\max} = 3\sigma \text{ pour } n = 1, 4 \tag{4.124}$$

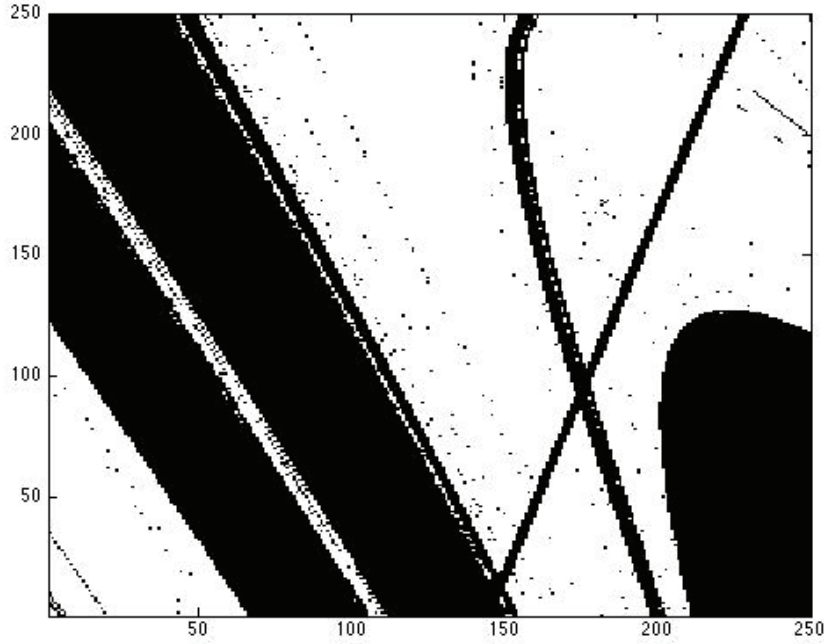


FIGURE 4.12 – Détail de la carte de stabilité pour 2 modes avec initialisation sur $u'(0, n)$ de $h_l(0, n)$,
 $\bar{u} \approx 0.15 - 0.16$, $\sigma \approx 0.05 - 0.06$, $\omega = 1.85$, $J = 120$, $t = 2000\Delta t$

Initialisation sur $h_l(0, n) = \text{fonction}(f_l^{eq}, f_l^{\bar{eq}})$ pour les modes résonants $\pi/2$ et π

On reprend la même problématique que précédemment pour 1 mode. On trouve le résultat suivant avec les mêmes hypothèses équivalentes sur u' et ρ' :

$$u'(0, n) = \sigma((1 + i)e^{n\pi/2} + (1 - i)e^{-n\pi/2} + 1e^{n\pi}) \quad (4.125)$$

$$\rho' = 0 \quad (4.126)$$

On obtient en final pour $A_l = X_l + Y_l$ et B_l :

$$A_l(0, n) = \sigma(1 + i)(\beta_l + 2\gamma_l\bar{u}) + \sigma^2(1 - i)\gamma_l \quad (4.127)$$

$$B_l(0, n) = \sigma(\beta_l + 2\gamma_l\bar{u}) + \sigma^2(-1)^n\gamma_l \quad (4.128)$$

La carte d'instabilité pour cette initialisation particulière est présentée en figure (4.13).

On peut reprendre le même commentaire que pour 1 mode :

- L'instabilité débute pour \bar{u} à la première racine linéaire $\bar{u} = 1 - 1/\sqrt{3}$, comme pour les premières initialisations précédentes.
- La valeur de l'amplitude initiale σ au dessus de laquelle les solutions sont instables est plus élevée : $[0.25]$.
- Par contre le tracé est plus accidenté.

Conclusion de cette analyse en modes résonants :

On retiendra de cette partie l'influence des conditions initiales (sans qu'une analyse exhaustive impossible, n'ait été effectuée), influence respective de A_l et de B_l , l'influence attendue de la viscosité.

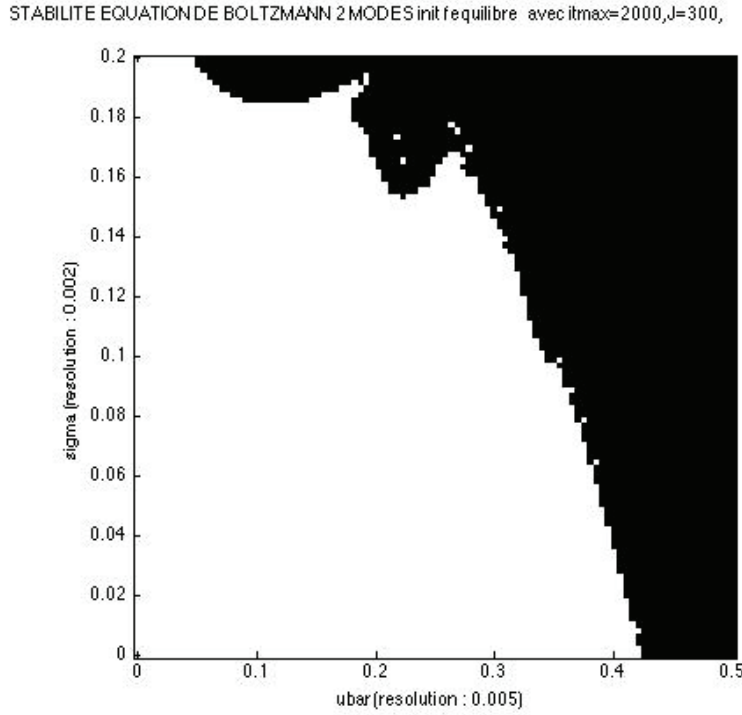


FIGURE 4.13 – Carte de stabilité pour 2 modes avec initialisation sur la fonction d'équilibre de $h_l(0, n)$, $\bar{u} = [0, 0.5]$, $\sigma = [0, 0.2]$, $\omega = 1.85$, $J = 300$, $t = 2000\Delta t$

On notera surtout la forme particulière de la carte d'instabilité pour l'initialisation sur $u'(0, n)$ avec les figures chaotiques à une échelle fine (de l'ordre de $4 \cdot 10^{-5}$ pour \bar{u} et σ). La borne de \bar{u} où l'instabilité débute, est pour toutes les configurations d'initialisation la même. Seule l'initialisation sur $u'(0, n)$ se démarque avec une borne beaucoup plus faible.

4.4 Analyse non linéaire en ondes résonantes. A-t on focalisation ?

Nous avons examiné pour **tous** les cas d'initialisation présentés, la présence d'éventuelles focalisations, en initiant la focalisation par des modes de sideband.

4.4.1 Présentation du problème, exemple d'équations obtenues

Avec un mode résonant

On pose pour $h_j(m, n)$, avec la simplification d'écriture suivante : $2\pi/3 = k, \mu =$ mode de sideband défini dans le chapitre 2 :

$$\begin{aligned}
 h_l(m, n) = & (A_l^0(m)e^{ikn} + A_l^1(m)e^{i(k-\mu)n} + A_l^2(m)e^{i(k+\mu)n} + b_l(m)e^{i\mu n} \\
 & + (A_l^{0*}(m)e^{-ikn} + A_l^{1*}(m)e^{-i(k-\mu)n} + A_l^{2*}(m)e^{-i(k+\mu)n} + b_l^*(m)e^{-i\mu n} \quad (4.129)
 \end{aligned}$$

On porte cette équation dans (4.12) et on égale les contributions en e^{ikn} , $e^{i(k-\mu)n}$, $e^{i(k+\mu)n}$, $e^{i\mu n}$, e^{-ikn} , $e^{i(k-\mu)n}$ soit 8 équations.

On écrira comme précédemment $e^{i2kn} = e^{-ikn}$ et $1 = p(n)(e^{ikn} + e^{-ikn})$ avec $p(n) = -1$ pour $n = 1, 2$ et $p(n) = 0.5$ pour $n = 3$. On ne prendra pas en compte dans les produits croisés, les produits du deuxième ordre de la forme $e^{i(jk \pm 2\mu)n}$ pour $j = 0, 1, 2$.

On rappelle également la simplification d'écriture suivante :

$$(1 - \omega)h_l(m, n) + \omega(\alpha_l \sum_j h_j(m, n) + \beta_l \sum_j c_j h_j(m, n)) = \sum a_{lj} h_j \quad (4.130)$$

On écrira à titre d'exemple la première équation, contribution à e^{ikn} :

$$\begin{aligned} & A_l^0(m+1)e^{ikc_l}(\bar{\rho} + p(n) \sum A_j^{0*}) + A_l^1(m+1)e^{i(k-\mu)c_l}(\sum b_j + p(n) \sum A_j^{1*}) \\ & + A_l^2(m+1)e^{i(k+\mu)c_l}(\sum b_j^* + p(n) \sum A_j^{2*}) + b_l(m+1)e^{i\mu c_l}(\sum A_j^1 + p(n) \sum b_j^*) \\ & + A_l^{0*}(m+1)e^{-ikc_l}(\sum A_j^{0*} + p(n) \sum A_j^0) + A_l^{1*}(m+1)e^{-i(k-\mu)c_l}(\sum A_j^{2*} + p(n) \sum A_j^1) \\ & + A_l^{2*}(m+1)e^{-i(k+\mu)c_l}(\sum A_j^{1*} + p(n) \sum A_j^2) + b_l^*(m+1)e^{-i\mu c_l}(\sum A_j^2 + p(n) \sum b_j) \\ & = \sum a_{lj} A_j^0(\bar{\rho} + p(n) \sum A_j^{0*}) + \sum a_{lj} A_j^1(\sum b_j + p(n) \sum A_j^{1*}) \\ & + \sum a_{lj} A_j^2(\sum b_j^* + p(n) \sum A_j^{2*}) + \sum a_{lj} b_j(\sum A_j^1 + p(n) \sum b_j^*) \\ & + \sum a_{lj} A_j^{0*}(\sum A_j^{0*} + p(n) \sum A_j^0) + \sum a_{lj} A_j^{1*}(\sum A_j^{2*} + p(n) \sum A_j^1) \\ & + \sum a_{lj} A_j^{2*}(\sum A_j^{1*} + p(n) \sum A_j^2) + \sum a_{lj} b_j^*(\sum A_j^2 + p(n) \sum b_j) - \gamma_l \bar{\rho} \bar{u}^2 \\ & + \omega \gamma_l [(\sum c_j A_j^{0*})^2 + 2(\sum c_j A_j^1)(\sum c_j b_j) + 2(\sum c_j A_j^2)(\sum c_j b_j^*) \\ & + 2(\sum c_j A_j^{1*})(\sum c_j A_j^{2*}) + 2\bar{\rho} \bar{u}(\sum c_j A_j^0) \\ & + 2p(n)((\sum c_j A_j^0)(\sum c_j A_j^{0*}) + (\sum c_j A_j^1)(\sum c_j A_j^{1*}) \\ & + (\sum c_j A_j^2)(\sum c_j A_j^{2*}) + (\sum c_j b_j)(\sum c_j b_j^*))] \quad (4.131) \end{aligned}$$

On a résolu le système des 8 équations avec les trois types d'initialisation de $h_l(0, n)$ avec $AAA, 0A - A, AA - A$, $u(0, n)$, $h_l(0, n)$ = fonctions d'équilibre.

Le résultat très étonnant est que **la totalité des zones stables est instable rapidement** comme le montre un exemple parmi d'autres :

Soit pour l'initialisation (a3) de $h_l(0, n)AA - A$, une étude en fonction du temps de $u(t, n)$ au point : $\bar{u} = 0.1, \sigma = 0.03$ (donc très loin de la "frontière" entre les zones stables et instables du chapitre précédent), dans les mêmes conditions de sideband $\mu = 3, A_l^2 = 0.000005$ que pour l'équation de Burgers.

La figure (4.14) montre, après seulement 50 pas de temps une oscillation du signal, à 100 pas de temps la déformation du signal s'amplifie (4.15), à 105 pas de temps le signal dépasse la limite sur plusieurs pas d'espace (4.16) et avec un pas de temps supplémentaire le signal explose (4.17) sur des pas d'espace bien précis ($j = 75, j = 105$).

La transformée de Fourier du signal pour $t = 106$ montre un spectre assez dense (4.18).

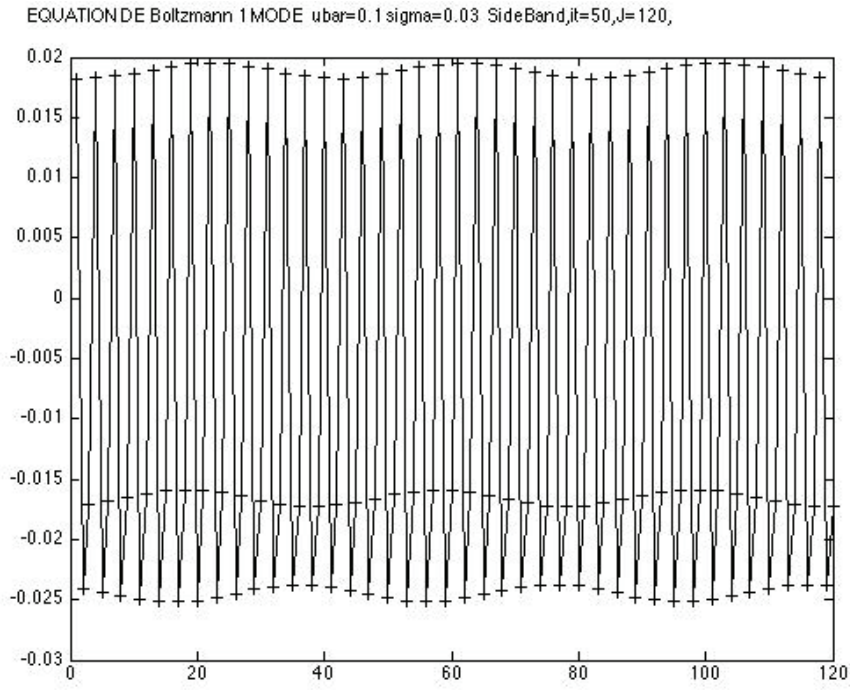


FIGURE 4.14 – Variations de $u'(t, n)$, fonction de n ,
 $\bar{u} = [0, 0.1]$, $\sigma = [0, 0.03]$, $\omega = 1.85$, $J = [1, 120]$, $t = 50\Delta t$, $\delta = 3$, $\mu = 0.000005$

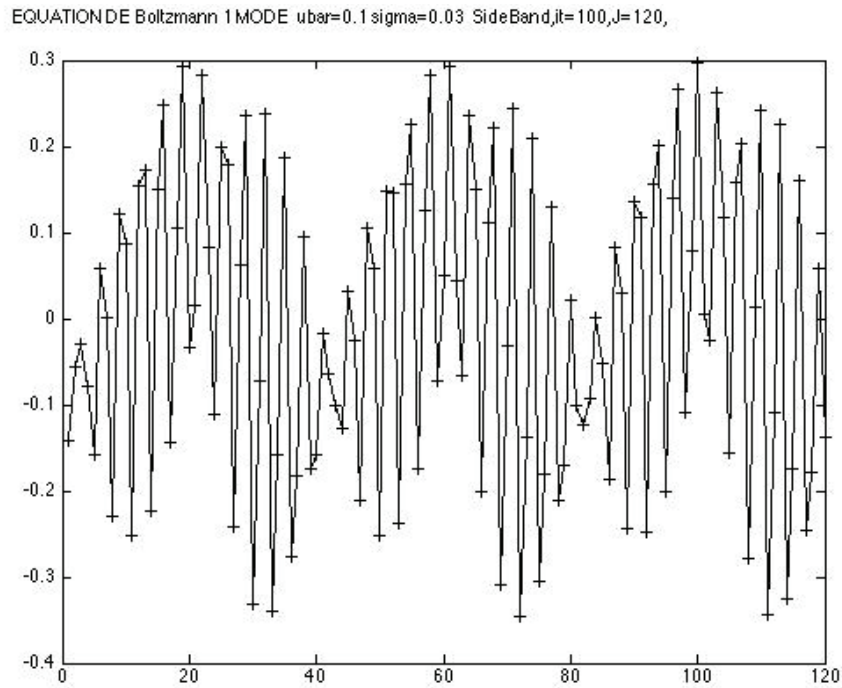


FIGURE 4.15 – Variations de $u'(t, n)$, fonction de n ,
 $\bar{u} = [0, 0.1]$, $\sigma = [0, 0.03]$, $\omega = 1.85$, $J = [1, 120]$, $t = 100\Delta t$, $\delta = 3$, $\mu = 0.000005$

Avec 2 modes résonants

On pose pour $h_j(m, n)$ avec la simplification d'écriture suivante $\pi/2 = k$, $\pi = 2k$, $\mu =$ mode de sideband défini dans le chapitre 2.

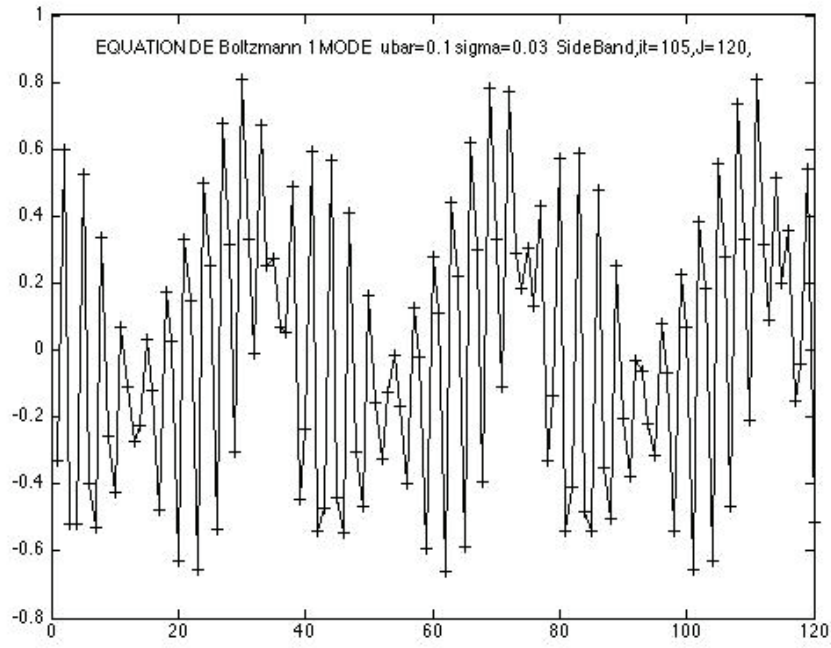


FIGURE 4.16 – Variations de $u'(t, n)$, fonction de n ,
 $\bar{u} = [0, 0.1]$, $\sigma = [0, 0.03]$, $\omega = 1.85$, $J = [1, 120]$, $t = 105\Delta t$, $\delta = 3$, $\mu = 0.000005$

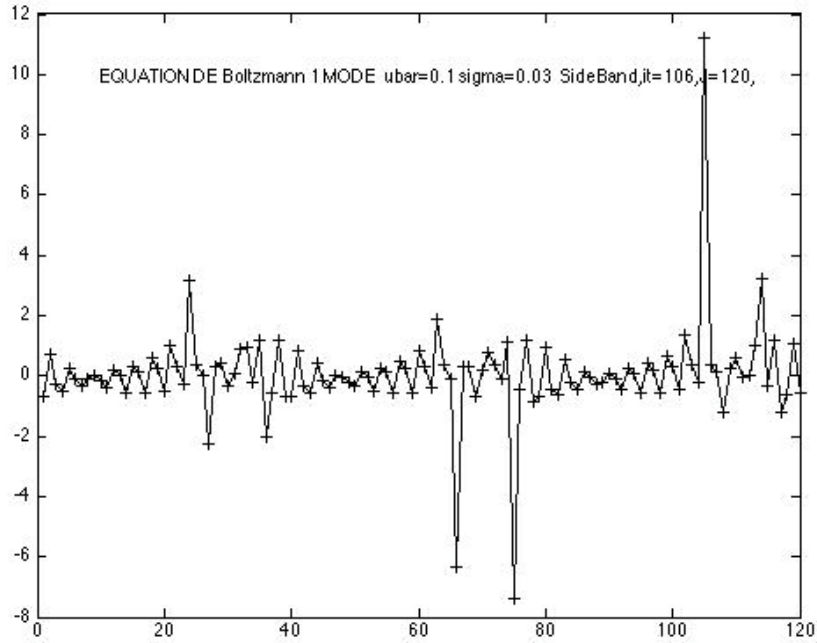


FIGURE 4.17 – Variations de $u'(t, n)$, fonction de n ,
 $\bar{u} = [0, 0.1]$, $\sigma = [0, 0.03]$, $\omega = 1.85$, $J = [1, 120]$, $t = 106\Delta t$, $\delta = 3$, $\mu = 0.000005$

$$\begin{aligned}
 h_l(m, n) = & A_l^0(m)e^{ikn} + A_l^1(m)e^{i(k-\mu)n} + A_l^2(m)e^{i(k+\mu)n} + B_l^1(m)e^{i(2k-\mu)n} + d_l(m)e^{i\mu n} \\
 & + A_l^{0*}(m)e^{-ikn} + A_l^{1*}(m)e^{-i(k-\mu)n} + A_l^{2*}(m)e^{-i(k+\mu)n} + B_l^{1*}(m)e^{-i(2k-\mu)n} + d_l^*(m)e^{-i\mu n} \\
 & + B_l^0(m)e^{i2kn} \quad (4.132)
 \end{aligned}$$

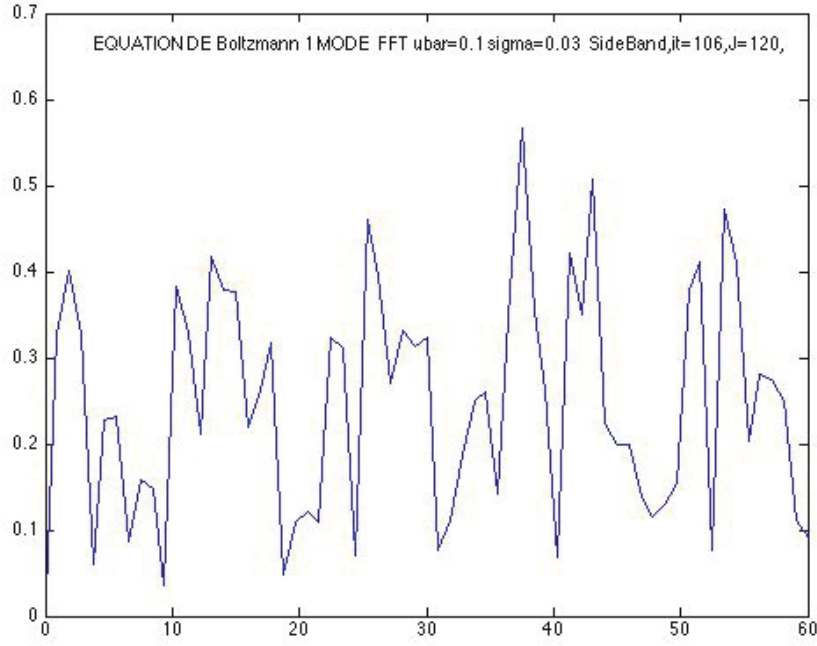


FIGURE 4.18 – FFT de $u'(t, n)$,
 $\bar{u} = [0, 0.1]$, $\sigma = [0, 0.03]$, $\omega = 1.85$, $J = [1, 120]$, $t = 106\Delta t$, $\delta = 3$, $\mu = 0.000005$

On porte cette équation dans (4.12) et on égale les contributions à e^{ikn} , $e^{i(k-\mu)n}$, $e^{i(k+\mu)n}$, e^{2ikn} , $e^{i(2k-\mu)n}$, $e^{i(2k+\mu)n}$, soit 11 équations ($B_l^0(m)$ est réel).

On écrira comme précédemment $e^{i3kn} = e^{ikn}$ et $1 = (-1)^n e^{i2kn}$.

On ne prendra pas en compte, comme précédemment les produits croisés de la forme $e^{i(jk \pm 2\mu)n}$ pour $j = 0, 1, 2$.

$$\begin{aligned}
& A_l^0(m+1)e^{ikc_l}(\bar{\rho}) + A_l^1(m+1)e^{i(k-\mu)c_l}(\sum d_j) + A_l^2(m+1)e^{i(k+\mu)c_l}(\sum d_j^*) \\
& + B_l^0(m+1)e^{2ikc_l}(\sum A_j^{0*}) + B_l^1(m+1)e^{i(2k-\mu)c_l}(\sum A_j^{1*}) + d_l(m+1)e^{i\mu c_l}(\sum A_j^1) \\
& + A_l^{0*}(m+1)e^{-ikc_l}(\sum B_j^0) + A_l^{1*}(m+1)e^{-i(k-\mu)c_l}(\sum B_j^1) + A_l^{2*}(m+1)e^{-i(k+\mu)c_l}(\sum B_j^{1*}) \\
& + B_l^{1*}(m+1)e^{-i(2k-\mu)c_l}(\sum A_j^{2*}) + d_l^*(m+1)e^{-i\mu c_l}(\sum A_j^2) \\
& = (\sum a_{lj}A_j^0)(\bar{\rho}) + (\sum a_{lj}B_j^0)(\sum A_j^{0*}) + (\sum a_{lj}d_j)(\sum A_j^1) + (\sum a_{lj}B_j^1)(\sum A_j^{1*}b_j^l) \\
& + (\sum a_{lj}d_j^*)(\sum A_j^2) + (\sum a_{lj}B_j^{1*})(\sum A_j^{2*}) + (\sum a_{lj}A_j^{0*})(\sum B_j^0) + (\sum a_{lj}A_j^{1*})(\sum B_j^1) \\
& + (\sum a_{lj}A_j^{2*})(\sum B_j^{1*}) + (\sum a_{lj}A_j^1)(\sum d_j) + (\sum a_{lj}A_j^2)(\sum d_j^*) \\
& + 2\omega\gamma_l[\bar{\rho}\bar{u}(\sum c_jA_j^0) + (\sum c_jA_j^{0*})(\sum c_jB_j^0) + (\sum c_jA_j^1)(\sum c_jd_j) \\
& + (\sum c_jA_j^{1*})(\sum c_jB_j^1) + (\sum c_jA_j^2)(\sum c_jd_j^*) + (\sum c_jA_j^{2*})(\sum c_jB_j^{1*})]
\end{aligned} \tag{4.133}$$

Nous avons introduit les modes de sideband avec la seule initialisation sur $u'(0, n)$.

La figure (4.19) montre le peu de sensibilité, vis à vis de cette introduction, seule la pointe est arrondie.

STABILITE EQUATION DE BOLTZMANN 2 MODES init Uo sideband: A2B1 avec itmax=2000, J=120,

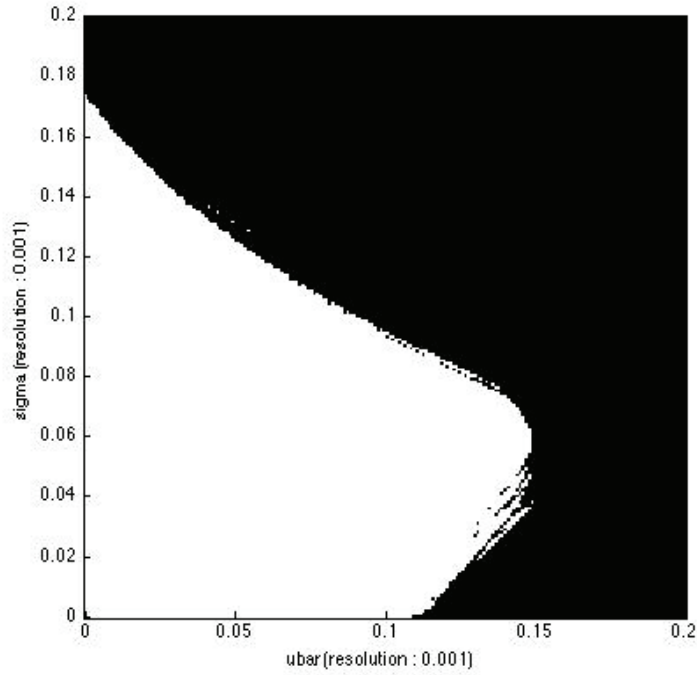


FIGURE 4.19 – Carte de stabilité pour 2 modes avec initialisation sur $u'(0, n)$ de $h_l(0, n)$, et sidebands sur A2 et B1

$\bar{u} = [0, 0.2]$, $\sigma = [0, 0.2]$, $\omega = 1.85$, $J = 120$, $t = 2000\Delta t$, $\delta = 3$, $\mu = 0.000005$

4.4.2 Conclusion partielle

Nous avons montré l'influence explosive sur l'instabilité des modes de sideband dans la solution à 1 mode et son absence d'influence sur un type d'initialisation pour la solution à 2 modes. Nous n'avons pas d'explication immédiate de ces comportements très différents vis à vis des modes de sideband dans les solutions résonantes à 1 mode et à 2 modes.

Stabilité linéaire et non linéaire non modale

La théorie de la stabilité hydrodynamique [40] a eu récemment de grands développements. Une perspective nouvelle a vu le jour en s'intéressant au comportement sur des temps courts, à une perturbation superposée à une base uniforme, plutôt que de se limiter uniquement au comportement à l'infini.

Cette perspective nouvelle était attendue pour tenter d'expliquer l'écart existant dans de nombreuses situations, entre le nombre de Reynolds critique calculé et celui mesuré.

Cette stabilité non modale est caractéristique des opérateurs non-normaux [17]. Elle présente sur des temps courts des croissances transitoires qui peuvent entraîner des instabilités [19, 20]. Une tentative d'optimisation de la croissance clot ce chapitre.

5.1 Stabilité linéaire non modale

La stabilité a été redéfinie dans un sens plus large incluant toutes conditions initiales sans horizon de temps. Le choix d'une mesure pour connaître l'évolution d'une perturbation s'est avérée nécessaire. L'intérêt s'est porté sur l'amplification maximum $G(t)$ de l'énergie au temps t , $E(t)$ par rapport à l'énergie initiale $E(0)$. On définit donc $G(t)$ comme :

$$G(t) = \max \frac{\| E(t) \|}{\| E(0) \|} \text{ pour } E(0) \text{ donnée} \quad (5.1)$$

La norme $\| E(t) \|$ est définie par le module de $E(t)$.

Il a été montré [22] que le comportement temporel de $G(t)$ différait entre un opérateur normal et un opérateur non-normal. Si on appelle L l'opérateur, il est non-normal si $LL^t \neq L^tL$. Beaucoup d'opérateurs en hydrodynamique, dont ceux que nous avons utilisés précédemment, sont non-normaux.

Avant de vérifier et d'appliquer sur les équations de Boltzmann linéarisées, les conséquences d'une éventuelle non-normalité de l'opérateur, nous montrerons à travers un exemple simple, les conséquences de cette non-normalité : la non-orthogonalité des vecteurs propres, la croissance transitoire potentiellement engendrée et l'apport des opérateurs adjoints dans ce processus.

L'équation modèle, ou un équivalent, que nous présentons, se retrouve dans de nombreux ouvrages et en particulier dans l'annexe D de [22]. Ce système modèle est fréquemment montré, car il se rapproche dans sa structure, de celle des équations de Orr-Sommerfeld et Squire, en particulier par le fait qu'une des coordonnées est liée à l'autre coordonnée par un terme non diagonal.

5.1.1 Equation modèle

Soit l'équation d'évolution linéaire de la forme :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\epsilon & 0 \\ 1 & -2\epsilon \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ avec } 0 < \epsilon \ll 1 \quad (5.2)$$

Le terme ϵ est proportionnel à $1/R_e$ et R_e nombre de Reynolds.

Calculons les vecteurs propres $e_1 = (e_{11}, e_{12})$ et $e_2 = (e_{21}, e_{22})$, liés aux valeurs propres respectivement : $\lambda_1 = -\epsilon$ et $\lambda_2 = -2\epsilon$. Les vecteurs propres seront normalisés à 1.

Pour la valeur propre $\lambda_1 = -\epsilon$, on a les équations des vecteurs propres :

$$e_{11} - \epsilon.e_{12} = 0 \quad (5.3)$$

$$(e_{11})^2 + (e_{12})^2 = 1 \quad (5.4)$$

Soit :

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2}}(\epsilon, 1) \quad (5.5)$$

Pour la valeur propre $\lambda_2 = -2\epsilon$ on a les équations des vecteurs propres :

$$\epsilon.e_{21} + 0.e_{22} = 0 \quad (5.6)$$

$$(e_{11})^2 + (e_{12})^2 = 1 \quad (5.7)$$

Soit : $e_2 = (0, 1)$

On peut écrire la solution sous la forme :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2}} e^{-\epsilon t} \begin{bmatrix} \epsilon \\ 1 \end{bmatrix} + B e^{-2\epsilon t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Les coefficients A et B sont obtenus à partir des conditions initiales :

Soit pour $t = 0$, $x_1(t = 0) = x_1^0$, $x_2(t = 0) = x_2^0$. On a les équations suivantes :

$$x_1^0 = A \frac{\epsilon}{\sqrt{1 + \epsilon^2}} \quad (5.9)$$

$$x_2^0 = A \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2}} + B \quad (5.10)$$

On obtient les coefficients A et B :

$$A = x_1^0 \frac{(\sqrt{1 + \epsilon^2})}{\epsilon} \quad (5.11)$$

$$B = x_2^0 - \frac{x_1^0}{\epsilon} \quad (5.12)$$

La solution finale s'écrit donc :

$$x_1 = x_1^0 e^{-\epsilon t} \quad (5.13)$$

$$x_2 = \frac{x_1^0}{\epsilon} e^{-\epsilon t} + \left(x_2^0 - \frac{x_1^0}{\epsilon}\right) e^{-2\epsilon t} \quad (5.14)$$

Examinons pour les temps courts, le comportement de x_2 .

Pour ϵt petit, on développera l'exponentielle sous la forme $e^{\epsilon t} = 1 + \epsilon t + \epsilon t^2 + O(\epsilon t^3)$:

Avec ce développement x_2 devient :

$$x_2 = \frac{x_1^0}{\epsilon} (1 - \epsilon t + \epsilon t^2 + O(\epsilon t^3)) + \left(x_2^0 - \frac{x_1^0}{\epsilon}\right) (1 - 2\epsilon t + 2\epsilon t^2 + O(\epsilon t^3)) \quad (5.15)$$

$$x_2 = x_2^0 e^{-2\epsilon t} + x_1^0 t - 3\epsilon x_1^0 t^2 + O(\epsilon t^3) \quad (5.16)$$

Ceci montre que, pour des temps petits $t < O(1/\epsilon)$, la composante x_2 , avec le terme $x_1^0 t$, peut croître en temps.

Ce phénomène est dû à la non-orthogonalité des vecteurs propres :

$$\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = \frac{\epsilon}{\sqrt{1 + \epsilon^2}} 0 + \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2}} 1 = |e_1| |e_2| \cos(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \quad (5.17)$$

Soit :

$$\cos(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2}} \quad (5.18)$$

L'exemple géométrique simple, illustré ci-dessous figure 5.1 montre comment un système gouverné par un opérateur non-normal peut montrer une amplification transitoire de l'énergie initiale.

Soit au temps $t = 0$ les conditions initiales sur la base des vecteurs non-orthogonaux \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 . L'angle entre \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 est défini par l'équation précédente.

Avec le temps, les longueurs des vecteurs décroissent, en conservant évidemment le même angle indépendant du temps, alors que la résultante f croît en longueur. Celle-ci s'annulera seulement pour des temps longs.

On voit que ce phénomène est impossible avec des vecteurs orthogonaux.

Cette non-orthogonalité des vecteurs propres est, elle-même due, à la non-normalité de la matrice L du système linéaire précédent :

$$L = \begin{bmatrix} -\epsilon & 0 \\ 1 & -2\epsilon \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

La non-normalité d'un opérateur s'exprime par $LL^t \neq L^t L$, vérifions :

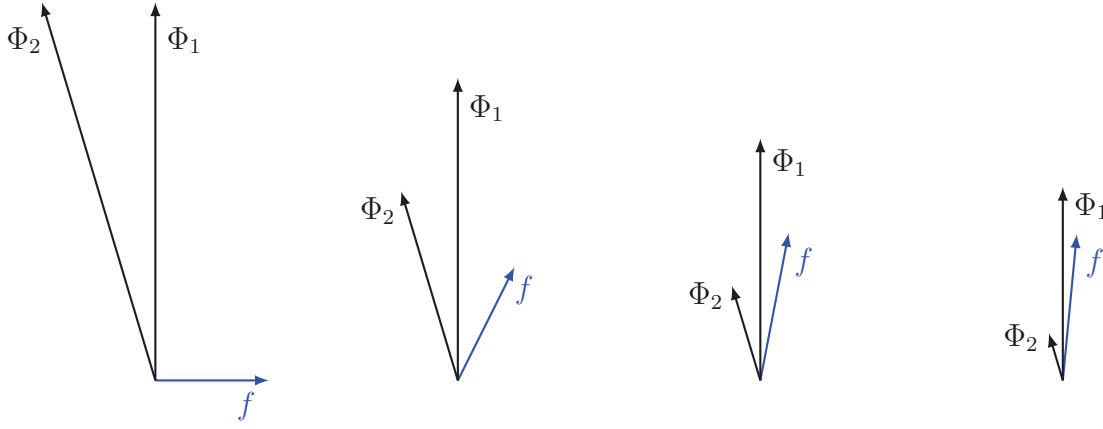


TABLE 5.1 – Amplification du vecteur f , résultante des vecteurs propres Φ_1 et Φ_2 non orthogonaux.

$$LL^t = \begin{bmatrix} -\epsilon & 0 \\ 1 & -2\epsilon \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\epsilon & 1 \\ 0 & -2\epsilon \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

$$= \begin{bmatrix} \epsilon^2 & -\epsilon \\ -\epsilon & (1 + \epsilon^2) \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

$$L^t L = \begin{bmatrix} -\epsilon & 1 \\ 0 & -2\epsilon \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\epsilon & 0 \\ 1 & -2\epsilon \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

$$= \begin{bmatrix} (\epsilon^2 + 1) & -2\epsilon \\ -2\epsilon & 4\epsilon^2 \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

On a bien la condition de non-normalité $LL^t \neq L^t L$.

La solution formelle du système différentiel précédent :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = L\mathbf{x} \text{ avec } \mathbf{x} = (x_1, x_2) \quad (5.24)$$

peut être représentée par :

$$\mathbf{x}(t) = e^{Lt}\mathbf{x}(0) \quad (5.25)$$

On peut donc écrire l'amplification maximum $G(t)$ par :

$$G(t) = \max \frac{\|\mathbf{x}(t)\|}{\|\mathbf{x}(0)\|} \text{ pour } \mathbf{x}(0) \text{ donné} \quad (5.26)$$

La norme $\|\mathbf{x}(t)\|$ est définie par le module de $\mathbf{x}(t)$: $\mathbf{x}(t) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Donc $G(t)$ devient :

$$G(t) = \max \| e^{Lt} \| \text{ pour } \mathbf{x}(0) \text{ donné} \quad (5.27)$$

Avec :

$$e^{Lt} = \begin{bmatrix} e^{-\epsilon t} & 0 \\ -\frac{1}{\epsilon}(e^{-2\epsilon t} - e^{-\epsilon t}) & e^{-2\epsilon t} \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

Calculons $\| e^{Lt} \|$:

$$\| e^{Lt} \| = \sqrt{e^{-2\epsilon t} + \frac{1}{\epsilon^2}(e^{-2\epsilon t} - e^{-\epsilon t})^2 + e^{-4\epsilon t}} \quad (5.29)$$

La figure suivante (5.1) montre le tracé de cette fonction pour plusieurs valeurs de ϵ respectivement 0.1, 0.04, 0.02, avec les conditions initiales $x_1(0) = x_2(0)$ et $(x_1(0))^2 + (x_2(0))^2 = 1$.

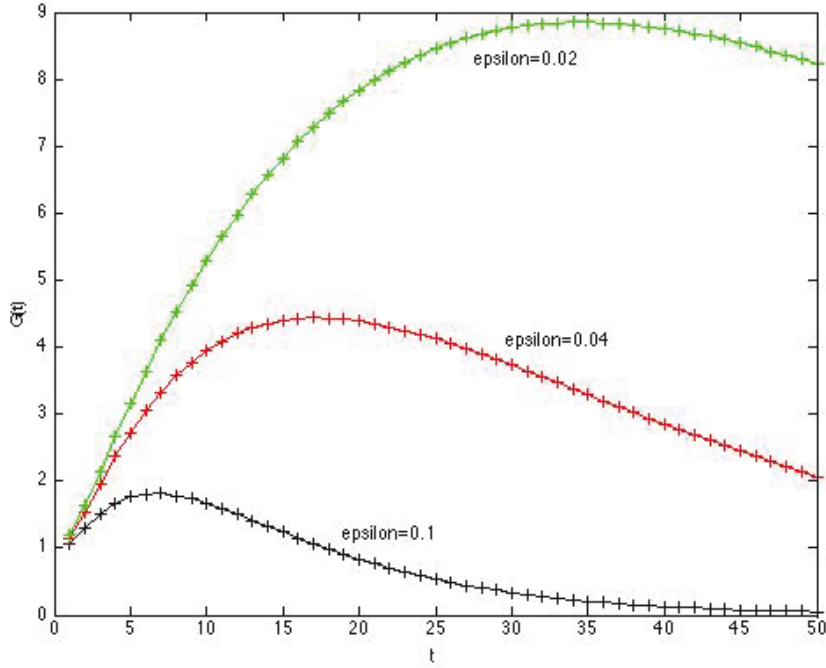


FIGURE 5.1 – Evolution de $G(t)$ pour $\epsilon = 0.1, 0.04, 0.02$

Nous avons également étudié les conditions optimales pour cette évolution de la façon suivante.

Nous calculons $\| e^{Lt} \|^2$ en développant pour des temps courts les exponentielles en série de Taylor :

Nous obtenons alors :

$$G(t)^2 = [x_1(0)^2 + (x_2(0))^2] + \epsilon t [-2(x_1(0))^2 - 4(x_2(0))^2 + \frac{4}{\epsilon}(x_1(0)x_2(0))] \quad (5.30)$$

$$\frac{d(G(t)^2)}{dt} = -2[(x_1(0))^2 + 2(x_2(0))^2 - \frac{2}{\epsilon}(x_1(0)x_2(0))] \quad (5.31)$$

$G(t)^2$ sera optimal en annulant le dernier terme. On posera $x_1(0) = -ax_2(0)$ et toujours $(x_1(0))^2 + (x_2(0))^2 = 1$.

On obtient l'équation du second degré suivante :

$$a^2 + \frac{2}{\epsilon}a + 2 = 0 \quad (5.32)$$

L'optimisation sera faite avec la racine négative dont le module est le plus grand :

$$a^- = -\frac{1}{\epsilon}a - \sqrt{\frac{1}{\epsilon^2} - 2} \quad (5.33)$$

La figure suivante (5.2) montre le tracé de cette fonction optimisée pour cette configuration de a^- , pour les mêmes valeurs de ϵ , avec les conditions initiales : $x_1(0) = x_2(0)$ et $(x_1(0))^2 + (x_2(0))^2 = 1$.

L'optimisation n'a pas été bouclée à la fois sur les conditions initiales et sur le temps.

C'est ce que nous ferons dans l'application de ces techniques aux équations de Boltzmann en utilisant le contrôle optimal et les équations adjointes.

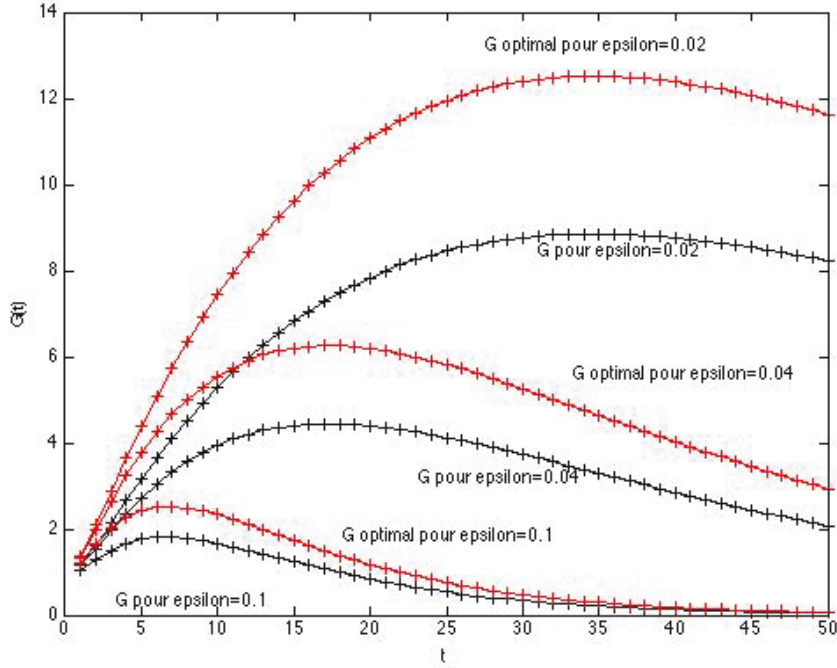


FIGURE 5.2 – Evolution de $G(t)$ optimal pour $\epsilon = 0.1, 0.04, 0.02$

5.1.2 Stabilité non modale de l'opérateur linéarisé des équations de Boltzmann

Non-normalité de l'opérateur linéarisé des équations de Boltzmann

Nous repartons de l'équation finale suivante :

$$h_l(m+1, n+c_l) = (1-\omega)h_l(m, n) + \omega[\alpha_l \sum h_j + \beta_l \sum c_j h_j + \gamma_l (\frac{(\sum c_j h_j + \bar{\rho}\bar{u})^2}{(\sum h_j + \bar{\rho})} - \bar{\rho}\bar{u}^2)] \quad (5.34)$$

que nous avons d'une part, linéarisée au chapitre 4 :

$$h_l(m+1, n+c_l) = (1-\omega)h_l(m, n) + \omega[\alpha_l \sum h_j + \beta_l \sum c_j h_j + \omega\gamma_l(2c_j\bar{u} - (\bar{u})^2)] \quad (5.35)$$

et que d'autre part nous simplifierons sous la forme :

$$h_l(m+1, n+c_l) = [(1-\omega)\delta_{lj} + \omega(\alpha_l - \gamma_l(\bar{u})^2)] \sum h_j + [\omega(\beta_l + 2\gamma_l\bar{u})] \sum c_j h_j \quad (5.36)$$

Calculons chacun des termes de l'opérateur linéarisé H tel que :

$$h(m+1, k) = H_{m+1, m} h(m, k) \quad (5.37)$$

On écrira les 3 équations pour $l = 1, 2, 3$:

$$h_1(m+1, k) = a_1 h_1(m, k) + a_2 h_2(m, k) + a_3 h_3(m, k) \quad (5.38)$$

$$h_2(m+1, k+1) = b_1 h_1(m, k) + b_2 h_2(m, k) + b_3 h_3(m, k) \quad (5.39)$$

$$h_3(m+1, k-1) = c_1 h_1(m, k) + c_2 h_2(m, k) + c_3 h_3(m, k) \quad (5.40)$$

On modifiera les 2 dernières équations pour avoir uniquement à gauche des termes en $h_l(m+1, k)$, soit :

$$h_1(m+1, k) = a_1 h_1(m, k) + a_2 h_2(m, k) + a_3 h_3(m, k) \quad (5.41)$$

$$h_2(m+1, k) = b_1 h_1(m, k-1) + b_2 h_2(m, k-1) + b_3 h_3(m, k-1) \quad (5.42)$$

$$h_3(m+1, k) = c_1 h_1(m, k+1) + c_2 h_2(m, k+1) + c_3 h_3(m, k+1) \quad (5.43)$$

En tenant compte des conditions périodiques (qu' on a ici réduites : $k = 1$ à 3 , pour écrire complètement la matrice), on peut maintenant définir l'opérateur à partir des équations précédentes :

$$\begin{bmatrix} h_1(m+1, 1) \\ h_2(m+1, 1) \\ h_3(m+1, 1) \\ h_1(m+1, 2) \\ h_2(m+1, 2) \\ h_3(m+1, 2) \\ h_1(m+1, 3) \\ h_2(m+1, 3) \\ h_3(m+1, 3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} h_1(m, 1) \\ h_2(m, 1) \\ h_3(m, 1) \\ h_1(m, 2) \\ h_2(m, 2) \\ h_3(m, 2) \\ h_1(m, 3) \\ h_2(m, 3) \\ h_3(m, 3) \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

Dans cette configuration on définit H comme :

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

Pour écrire, d'une façon plus générale ($k = 1$ à N), cet opérateur H , on va définir les 3 matrices A, B, C , de dimensions 3×3 , suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

La matrice H s'écrit alors d'une façon plus générale sous la forme :

$$H = \begin{bmatrix} A & C & 0 & \cdots & 0 & B \\ B & A & C & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & B & A & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A & C \\ C & 0 & 0 & \cdots & B & A \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

et, dans le cas où $N = 3$:

$$H = \begin{bmatrix} A & C & B \\ B & A & C \\ C & B & A \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

Nous devons déterminer les matrices A, B, C , et pour ce faire calculer les termes : $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2$. On rappelle les valeurs suivantes :

$$\alpha_1 = \frac{2}{3}, \alpha_2 = \frac{1}{6}, \alpha_3 = \frac{1}{6}, \quad (5.49)$$

$$\beta_1 = 0, \beta_2 = \frac{1}{2}, \beta_3 = -\frac{1}{2}, \quad (5.50)$$

$$\gamma_1 = -1, \gamma_2 = \frac{1}{2}, \gamma_3 = \frac{1}{2}, \quad (5.51)$$

$$c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = -1 \quad (5.52)$$

On obtient alors :

$$a_1 = (1 - \omega) + \omega(\alpha_1 - \gamma_1 \bar{u}^2) + (\beta_1 + 2\bar{u}\gamma_1)c_1 = (1 - \frac{\omega}{3} + \omega \bar{u}^2) \quad (5.53)$$

$$a_2 = \omega(\alpha_1 - \gamma_1 \bar{u}^2) + (\beta_1 + 2\bar{u}\gamma_1)c_2 = \omega((\frac{2}{3} + \bar{u}^2) - 2\bar{u}) \quad (5.54)$$

$$a_3 = \omega(\alpha_1 - \gamma_1 \bar{u}^2) + (\beta_1 + 2\bar{u}\gamma_1)c_3 = \omega((\frac{2}{3} + \bar{u}^2) + 2\bar{u}) \quad (5.55)$$

$$b_1 = \omega(\alpha_2 - \gamma_2 \bar{u}^2) + (\beta_2 + 2\bar{u}\gamma_2)c_1 = \omega(\frac{1}{6} - \frac{\bar{u}^2}{2}) \quad (5.56)$$

$$b_2 = (1 - \omega) + \omega(\alpha_2 - \gamma_2 \bar{u}^2) + (\beta_2 + 2\bar{u}\gamma_2)c_2 = (1 - \frac{\omega}{3} + \omega(\bar{u} - \frac{\bar{u}^2}{2})) \quad (5.57)$$

$$b_3 = \omega(\alpha_2 - \gamma_2 \bar{u}^2) + (\beta_2 + 2\bar{u}\gamma_2)c_3 = -\omega(\frac{1}{3} + \bar{u} + \frac{\bar{u}^2}{2}) \quad (5.58)$$

$$c_1 = \omega(\alpha_3 - \gamma_3 \bar{u}^2) + (\beta_3 + 2\bar{u}\gamma_3)c_1 = \omega(\frac{1}{6} - \frac{\bar{u}^2}{2}) \quad (5.59)$$

$$c_2 = \omega(\alpha_3 - \gamma_3 \bar{u}^2) + (\beta_3 + 2\bar{u}\gamma_3)c_2 = -\omega(\frac{1}{3} - \bar{u} + \frac{\bar{u}^2}{2}) \quad (5.60)$$

$$c_3 = (1 - \omega) + \omega(\alpha_3 - \gamma_3 \bar{u}^2) + (\beta_3 + 2\bar{u}\gamma_3)c_3 = (1 - \frac{\omega}{3} - \omega(\bar{u} + \frac{\bar{u}^2}{2})) \quad (5.61)$$

Si on pose :

$$h_l(m, k) = \hat{h}_l(k) e^{-im\Omega} \quad (5.62)$$

$$h_l(m+1, k) = \hat{h}_l(k) e^{-i(m+1)\Omega} = \hat{h}_l(k) e^{-im\Omega} e^{-i\Omega} \quad (5.63)$$

Et $\lambda = e^{-i\Omega}$.

On obtient le système aux valeurs propres suivant :

$$(H - \lambda I) \hat{h}_j(k) = 0 \quad (5.64)$$

Pour obtenir les valeurs propres, on doit résoudre le déterminant du système plus général avec $k = 1, N$:

$$\det(H) = \begin{bmatrix} A - \lambda I & C & 0 & \cdots & 0 & B \\ B & A - \lambda I & C & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & B & A - \lambda I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A - \lambda I & C \\ C & 0 & 0 & \cdots & B & A - \lambda I \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

On peut additionner l'ensemble des colonnes sur la première colonne :

$$\det(H) = \begin{bmatrix} A - \lambda I + B + C & C & 0 & \cdots & 0 & B \\ A - \lambda I + B + C & A - \lambda I & C & \cdots & 0 & 0 \\ A - \lambda I + B + C & B & A - \lambda I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ A - \lambda I + B + C & 0 & 0 & \cdots & A - \lambda I & C \\ A - \lambda I + B + C & 0 & 0 & \cdots & B & A - \lambda I \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

Soit :

$$\det(H) = [A - \lambda I + B + C] \begin{bmatrix} I & C & 0 & \cdots & 0 & B \\ I & A - \lambda I & C & \cdots & 0 & 0 \\ I & B & A - \lambda I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ I & 0 & 0 & \cdots & A - \lambda I & C \\ I & 0 & 0 & \cdots & B & A - \lambda I \end{bmatrix} \quad (5.67)$$

Avec :

$$[A - \lambda I + B + C] = \begin{bmatrix} a_1 - \lambda & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 - \lambda & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 - \lambda \end{bmatrix} \quad (5.68)$$

Les valeurs propres de cette matrice sont obtenues en posant $k = 0$ dans l'équation du 3ième degré du chapitre précédent (5.69).

On obtient alors :

$$(1 - \lambda)(-d + \lambda d + (b + d - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1)) = -d(1 - \lambda)^2 + (b + d - \lambda)(1 - \lambda)^2 \quad (5.69)$$

$$= [(1 - \lambda)^2](b - \lambda) \quad (5.70)$$

Les valeurs propres sont : $1, 1, b = 1 - \omega$. Ces valeurs propres sont constantes quelle que soit n , car ce sont les bornes du domaine $0, 2\pi$ pour lesquelles $\cos k = 1$ et $1 - \omega$ constant. Les autres valeurs propres dépendent de n .

L'ensemble des valeurs propres peut être calculé analytiquement car la matrice H est une matrice particulière, circulantes par blocs[28].

Revenons à la matrice (5.48) de degré $N = 3$ le plus simple, mode résonant en $2\pi/3$, et examinons sa normalité :

Calculons les produits $H \times H^t$ et $H^t \times H$ où H^t est la transposée de H .

$$\begin{aligned} HH^t &= \begin{bmatrix} A & C & B \\ B & A & C \\ C & B & A \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A^t & B^t & C^t \\ C^t & A^t & B^t \\ B^t & C^t & A^t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} AA^t + BB^t + CC^t & AB^t + CA^t + BC^t & AC^t + CB^t + BA^t \\ BA^t + AC^t + CB^t & AA^t + BB^t + CC^t & CA^t + BC^t + AB^t \\ CA^t + BC^t + AB^t & BA^t + AC^t + CB^t & AA^t + BB^t + CC^t \end{bmatrix} \quad (5.71) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H^tH &= \begin{bmatrix} A^t & B^t & C^t \\ C^t & A^t & B^t \\ B^t & C^t & A^t \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A & C & B \\ B & A & C \\ C & B & A \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A^tA + B^tB + C^tC & AB^t + CA^t + BC^t & C^tA + B^tC + A^tB \\ A^tB + C^tA + B^tC & A^tA + B^tB + C^tC & A^tC + C^tB + B^tA \\ A^tC + C^tB + B^tA & BA^t + AC^t + CB^t & A^tA + B^tB + C^tC \end{bmatrix} \quad (5.72) \end{aligned}$$

Il reste à calculer les différents produits matriciels, on appellera X^i les matrices A, B, C et x_1^i, x_2^i, x_3^i les éléments $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ pour $i =$ respectivement $1, 2, 3$.

Les produits $X_iX_j^t$, pour $i = j$ sont égaux à des matrices contenant seulement un élément sur la diagonale du type : $(x_1^i)^2 + (x_2^i)^2 + (x_3^i)^2$.

Les produits $X_i^tX_j$, pour $i = j$ sont égaux à des matrices pleines du type :

$$\begin{bmatrix} (x_1^i)^2 & (x_1^i)(x_2^i) & (x_1^i)(x_3^i) \\ (x_1^i)(x_2^i) & (x_2^i)^2 & (x_2^i)(x_3^i) \\ (x_1^i)(x_3^i) & (x_2^i)(x_3^i) & (x_3^i)^2 \end{bmatrix} \quad (5.73)$$

Les produits $X_i^tX_j$, pour $i \neq j$ sont tous nuls.

Les produits $X_i X_j^t$, pour $i \neq j$ sont égaux à des matrices contenant seulement un élément hors de la diagonale du type : $(x_1^i)(x_1^j) + (x_2^i)(x_2^j) + (x_3^i)(x_3^j)$.

Les 2 produits $H \times H^t$ et $H^t \times H$ auront donc la forme respective suivante, par exemple pour $\bar{u} = 1 - 1/\sqrt{3}$:

$$HH^t = \begin{bmatrix} 0.55 & 0.14 & 1.93 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.14 & 1. & -1.56 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.93 & -1.56 & 12.55 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.55 & 0.14 & 1.93 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.14 & 1. & -1.56 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.93 & -1.56 & 12.55 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.55 & 0.14 & 1.93 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.14 & 1. & -1.56 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.93 & -1.56 & 12.55 \end{bmatrix} \quad (5.74)$$

$$H^t H = \begin{bmatrix} 10.29 & 0 & 0 & 0 & -4.79 & 0 & 0 & 0 & -1.66 \\ 0 & 3.47 & 0 & 0 & 0 & 0.9 & -4.79 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.34 & -1.66 & 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0 \\ 0 & 0 & -1.66 & 10.29 & 0 & 0 & 0 & -4.79 & 0 \\ -4.79 & 0 & 0 & 0 & 3.47 & 0 & 0 & 0 & 0.9 \\ 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0.34 & -1.66 & 0 & 0 \\ 0 & -4.79 & 0 & 0 & 0 & -1.66 & 10.29 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 & -4.79 & 0 & 0 & 0 & 3.47 & 0 \\ -1.66 & 0 & 0 & 0 & 0.90 & 0 & 0 & 0 & 0.34 \end{bmatrix} \quad (5.75)$$

Soit en résumé :

$$HH^t = \begin{bmatrix} H1 & 0 & 0 \\ 0 & H1 & 0 \\ 0 & 0 & H1 \end{bmatrix} \quad (5.76)$$

$$H^t H = \begin{bmatrix} D1 & H2 & H2^t \\ H2^t & D1 & H2 \\ H2 & H2^t & D1 \end{bmatrix} \quad (5.77)$$

L'opérateur H est **non normal**, donc susceptible de présenter des croissances transitoires.

Croissance transitoire de l'opérateur linéarisé, non-normal des équations de Boltzmann

Nous allons reprendre l'équation linéarisée (5.37).

Nous posons pour simplifier l'écriture : $x(m, k) = h_l(m, k)$ avec pour le vecteur $x(m, k)$, les composantes suivantes : $x_1(m, k) = h_1(m, k)$, $x_2(m, k) = h_2(m, k)$, $x_3(m, k) = h_3(m, k)$, $x_4(m, k+1) = h_1(m, k+1)$, ..., $x_{3N}(m, k) = h_3(m, N)$.

L'équation linéarisée (5.37) s'écrira donc :

$$x(m+1, k) = Hx(m, k) \quad (5.78)$$

Comme précédemment, on posera :

$$x(m, k) = u(k)e^{im\Omega} \quad (5.79)$$

$$x(m+1, k) = u(k)e^{i(m+1)\Omega} \quad (5.80)$$

On obtiendra l'équation aux valeurs propres :

$$Hu(k) = e^{i\Omega}u(k), \text{ et en posant } \lambda = e^{i\Omega} \quad (5.81)$$

$$Hu_i(k) = \lambda_i u_i(k) \quad (5.82)$$

Nous devons, pour aborder le système adjoint, définir le produit scalaire suivant :

$$(x, y) = \bar{x}^t y + c.c. \quad (5.83)$$

(où \bar{x}^t est le vecteur conjugué et transposé de x) Le système adjoint est alors défini par :

$$(Hx, y) = (x, H^+y) \quad (5.84)$$

où H^+ est la matrice adjointe de H Cette matrice adjointe aura ses propres valeurs propres (conjuguées de celles de H) et ses propres vecteurs propres que l'on écrira :

$$H^+v_j(k) = \mu_j v_j(k) \quad (5.85)$$

Nous simplifierons l'écriture en supprimant le (k) .

Nous allons prendre la conjuguée et transposée de cette équation (5.85) et multiplier à droite par u_i , soit :

$$\bar{v}_j^t (Hu_i) = \bar{\mu}_j \bar{v}_j^t u_i = \bar{v}_j^t \lambda_i u_i \quad (5.86)$$

$$\text{soit } : (\lambda_i - \bar{\mu}_j)(\bar{v}_j^t u_i) = 0 \quad (5.87)$$

Sauf pour $i = j$ pour lequel $\lambda_i = \bar{\mu}_j$, on a $(\bar{v}_j^t u_i) = 0$.

Dans le cas où les vecteurs propres de H et H^+ ont été normalisés (ce sera notre cas), on aura donc :

$$(u_i, v_j) = \delta_{ij} \quad (5.88)$$

ou vectoriellement avec (5.83) :

$$\bar{U}^t V = I \quad (5.89)$$

Soit :

$$\bar{U}^t = V^{-1}, (\bar{U}^t)^{-1} = V, \bar{V}^t = U^{-1} \quad (5.90)$$

On pourra alors écrire :

$$v_j H u_i = \bar{v}_j^t H u_i = \lambda_i \bar{v}_j^t u_i = \lambda_i \delta_{ij} \quad (5.91)$$

ou vectoriellement :

$$\bar{V}^t H U = U^{-1} H U = \Lambda \quad (5.92)$$

Développons x sur la base des vecteurs propres $x = Uq$.

$$x(m+1) = Uq(m+1) = Hx(m) = HUq(m) \quad (5.93)$$

$$q(m+1) = U^{-1}HUq(m) = \Lambda q(m) \quad (5.94)$$

$$q(m+1) = U^{-1}x(m+1) = \Lambda U^{-1}x(m) \quad (5.95)$$

$$x(m+1) = U\Lambda U^{-1}x(m) \quad (5.96)$$

On doit transporter comme précédemment les fonctions : $x(m, k) = h_l(m, k)$ dont les composantes sont : $x_1(m, k) = h_1(m, k), x_2(m, k) = h_2(m, k), x_3(m, k) = h_3(m, k), x_4(m, k+1) = h_1(m, k+1), \dots, x_{3N}(m, k) = h_3(m, N)$.

Soit $Tr(i, j)$ la matrice de transport entre les différentes composantes de $h_l(m, k)$ composée de 0 et de 1.

On obtient la matrice de propagation P , après collision et transport entre $x(m+1)$ et $x(0)$:

$$x(m+1) = [Tr U \Lambda^{m+1} (U^{-1})^{m+1} x(0)] = P(m+1)x(0) \quad (5.97)$$

Nous définissons l'énergie au temps $T = (m+1)\Delta t$ par :

$$E[x(m+1), x(m+1)] = [P(m+1)x(0), P(m+1)x(0)] \quad (5.98)$$

Et la fonction amplification $G(T)$ par :

$$G(T) = \max \frac{\|E(T)\|}{\|E(0)\|} \text{ pour } E(0) \text{ donnée} \quad (5.99)$$

$$= \max \frac{(\bar{P}^t P x(0))}{(x(0), x(0))} \quad (5.100)$$

On ajoute la contrainte suivante sur l'énergie initiale suivante : $(x(0), x(0)) = 1$.

Nous allons utiliser les multiplicateurs de Lagrange pour définir cette amplification maximale.

On écrit le lagrangien sans contrainte sous la forme :

$$\mathcal{L} = [Px(0), Px(0)] - g[(x(0), x(0)) - 1] \quad (5.101)$$

(Avec g multiplicateur de Lagrange).

On va calculer la différentielle $d\mathcal{L}$ par rapport aux variables $x(0), g$.

$$\begin{aligned} d\mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x(0)} dx(0) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g} dg \\ &= \frac{\partial}{\partial x(0)} ([x(0), \bar{P}^t P x(0)] - g[(x(0), x(0)) - 1]) dx(0) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial g} (-g[(x(0), x(0)) - 1]) dg \\ &= [(1, \bar{P}^t P x(0)) + (x(0), \bar{P}^t P)] dx(0) - g[(1, x(0)) + (x(0), 1)] dx(0) \\ &\quad - [(x(0), x(0)) - 1] dg \end{aligned} \quad (5.102)$$

En annulant chacune des différentielles, on obtient les équations suivantes :

$$\bar{P}^t P x(0) = g x(0) \quad (5.103)$$

$$\text{on retrouve notre contrainte réalisée :} \quad (5.104)$$

$$(x(0), x(0)) = 1 \quad (5.105)$$

Donc g est une valeur propre de la matrice $\bar{P}^t P$. Et la fonction amplification $G(T)$ devient :

$$G(T) = \max \frac{(\bar{P}^t P x(0))}{(x(0), x(0))} \quad (5.106)$$

$$= \max(g) = \lambda_g \quad (5.107)$$

L'énergie maximum sera donc, au temps T , le produit de la matrice de propagation par le vecteur propre de la plus grande valeur propre λ_g :

$$E[x(T), x(T)] = [P(T)\lambda_g, P(T)\lambda_g] \quad (5.108)$$

Les figures suivantes, (5.3) et (5.4) montrent l'évolution de la fonction $E(t)$ en fonction de \bar{u} et t , présente plusieurs transitoires :

On peut distinguer sur la coupe de la figure (5.4) des amplifications importantes pour les énergies porteuses plus fortes (cette amplification est de l'ordre de 15 pour $\bar{u} = 0.4$. On note que l'amplification se répète à un niveau plus faible à d'autres temps courts .

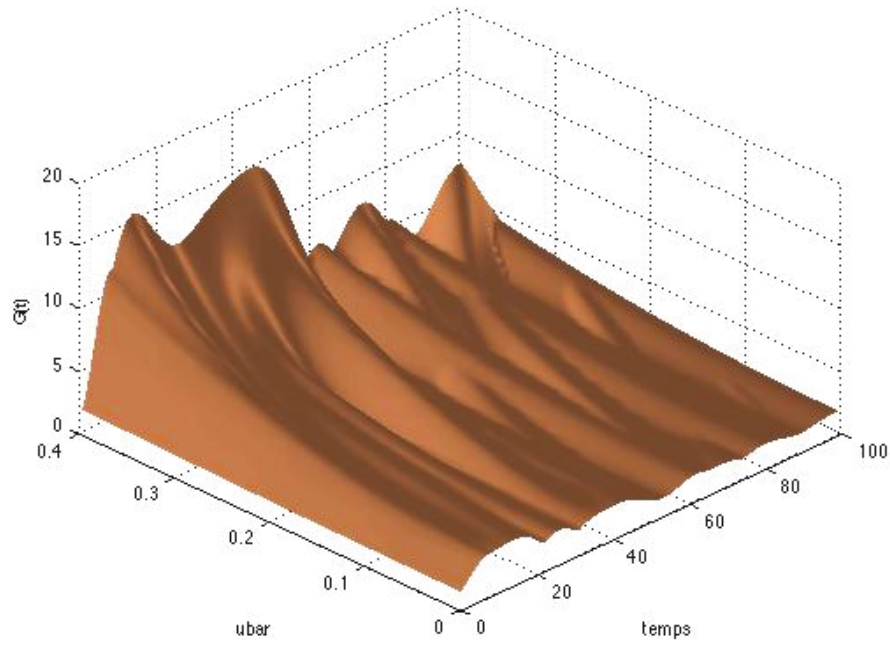


FIGURE 5.3 – Evolution de $E(t)$ en fonction de t et \bar{u} ,
 $\bar{u} = [0, 0.4]$, $t = [0, 100]$

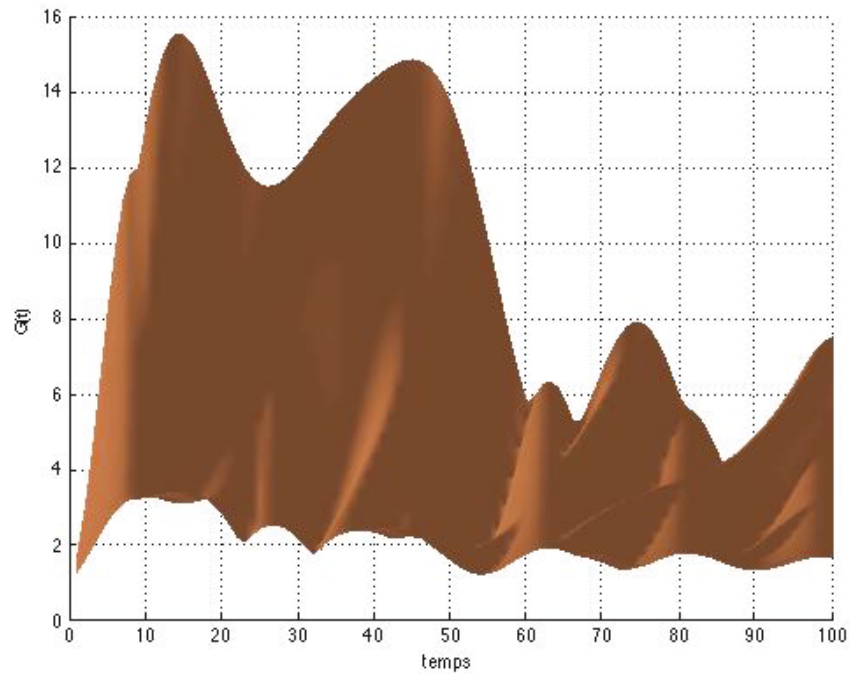


FIGURE 5.4 – Evolution de $E(t)$ en fonction de t et \bar{u} ,
 $\bar{u} = [0, 0.4]$, $t = [0, 100]$

5.2 Optimisation non linéaire des équations de Boltzmann en temps courts

De nombreuses publications ont été produites sur l'optimisation transitoire des équations de Navier-Stokes (dans sa formulation linéarisée Orr-Sommerfeld) [22], sur le contrôle optimal de la croissance transitoire dans l'équation de Burgers continue [41] ou le contrôle optimal de la croissance transitoire dans la couche limite [19].

Il semble que l'étude que nous présentons sur l'application de ces méthodes de contrôle optimal à des écoulements simulés par la méthode de Boltzmann soit originale.

Elle s'appuie sur l'établissement de l'équation adjointe de Boltzmann pour des problèmes d'optimisation [42].

5.2.1 Principe de l'optimisation non linéaire des croissances dans l'équation de Burgers continue

On rappelle le schéma utilisé [41] pour l'optimisation de la croissance dans l'équation de Burgers continue. Soit l'équation d'état de Burgers adimensionnée :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (5.109)$$

Avec la condition à la frontière suivante : $u(\infty, t) = 0$ et la condition initiale $u(0, x) = u_0(x)$.

L'objectif du contrôle est de maximiser la fonction d'amplification $\mathcal{I}(u(x, T), u_0(x))$ de l'énergie au temps T par rapport à l'énergie initiale :

$$\mathcal{I}(u(x, T), u_0(x)) = \frac{[1/2 \int_0^\infty u(x, T)^2 dx]}{[1/2 \int_0^\infty u(x, 0)^2 dx]} \quad (5.110)$$

Afin de transformer le problème d'optimisation, sous les contraintes énoncées précédemment, en un problème d'optimisation sans contrainte, on introduit les multiplicateurs de Lagrange : $\tilde{u}(x, t), \tilde{u}_0(x)$ dans la fonctionnelle Lagrangienne $\mathcal{L}[u(x, t), u_0(x), \tilde{u}(x, t), \tilde{u}_0(x)]$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u(x, t), u_0(x), \tilde{u}(x, t), \tilde{u}_0(x)] = \\ \mathcal{I}(u(x, T), u_0(x)) - \langle F(u(x, t)), \tilde{u}(x, t) \rangle_{\mathcal{D}} - (G(u(x, 0), u_0(x)), \tilde{u}_0(x))_t \end{aligned} \quad (5.111)$$

Avec les produits scalaires suivant ainsi définis :

$$\langle a, b \rangle_{\mathcal{D}} = \int_0^T \int_0^\infty a b \, dx \, dt \quad (5.112)$$

$$(a, b)_t = \int_0^T a b \, dt \quad (5.113)$$

$$(a, b)_x = \int_0^L a b \, dx \quad (5.114)$$

La fonctionnelle Lagrangienne $\mathcal{L}[u(x, t), u_0(x), \tilde{u}(x, t), \tilde{u}_0(x)]$ admet un extremum lorsque \mathcal{L} est rendue stationnaire par rapport à chacun de ses arguments.

Le calcul des variations impose alors $\delta\mathcal{L} = 0$.

Soit :

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}\delta u + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \tilde{u}}\delta \tilde{u} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_0}\delta u_0 + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \tilde{u}_0}\delta \tilde{u}_0 \quad (5.115)$$

Les arguments de la fonctionnelle \mathcal{L} étant supposés indépendants les uns des autres, la dérivée doit être identiquement nulle dans toutes les directions quelles que soient les variations considérées.

Par conséquent, on a :

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}\delta u = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \tilde{u}}\delta \tilde{u} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_0}\delta u_0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \tilde{u}_0}\delta \tilde{u}_0 = 0 \quad (5.116)$$

On obtient un schéma d'optimisation [41], permettant de calculer la croissance maximum.

On relève déjà une première problématique que l'on illustrera plus abondamment avec l'équation de Boltzmann : choix entre l'approche - discrétisation puis différentiation - ou l'approche - différentiation puis discrétisation - .

Soit :

- équation continue \rightarrow équation discrétisée \rightarrow équation adjointe discrétisée \rightarrow optimisation sur variables discrétisées.
- équation continue \rightarrow équation adjointe \rightarrow équation discrète adjointe \rightarrow optimisation sur variables discrétisées.

On retrouve ces différentes possibilités, pour l'équation de Boltzmann mono-dimensionnelle présentée dans les chapitres précédents avec 5 formes plus ou moins discrétisées.

- L'équation continue :

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} + v \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = -\frac{1}{\lambda}(f(x, t) - f^{eq}) \quad (5.117)$$

- Les équations discrétisées en vitesse dans le réseau D1Q3 :

$$\frac{\partial f_l(x, t)}{\partial t} + c_l \frac{\partial f_l(x, t)}{\partial x} = -\frac{1}{\lambda}(f_l(x, t) - f_l^{eq}) \quad (5.118)$$

- Les équations obtenues après la décomposition des fonctions de distribution f_l en composantes stationnaires \bar{f}_l et fluctuantes f'_l :

$$\frac{\partial f'_l(x, t)}{\partial t} + c_l \frac{\partial f'_l(x, t)}{\partial x} = -\frac{1}{\lambda}(f'_l(x, t) - (f_l^{eq} - \bar{f}_l^{eq})) \quad (5.119)$$

- Ces dernières équations (5.119) discrétisées en espace et en temps :

$$h_l(m+1, n+c_l) = (1-\omega)h_l(m, n) + \omega \left[\alpha_l \sum h_j + \beta_l \sum c_j h_j + \gamma_l \left(\frac{(\sum c_j h_j + \bar{\rho} \bar{u})^2}{(\sum h_j + \bar{\rho})} - \bar{\rho} \bar{u}^2 \right) \right] \quad (5.120)$$

- Avec h_l définies précédemment en fonction des f'_l (chapitre 3).
- Linéarisées, elles ont fait l'objet d'une analyse de stabilité linéaire, puis d'une étude non linéaire en calculant des solutions exactes par superposition de modes résonants,
 - . à 1 mode :

$$h_l(m, n) = A_l(m)e^{ni\frac{2\pi}{3}} + A_l^*(m)e^{-ni\frac{2\pi}{3}} \quad (5.121)$$

- . à 2 modes :

$$h_l(m, n) = A_l(m)e^{in\frac{\pi}{2}} + A_l^*(m)e^{-in\frac{\pi}{2}} + B_l(m)e^{in\pi} \quad (5.122)$$

On a obtenu des cartes de stabilité très dépendantes des conditions initiales. C'est à partir de cette dernière forme en modes résonants, que l'optimisation de la croissance doit se faire, en particulier sur $A_l(0), B_l(0)$.

On est loin de l'optimisation modèle précédente, d'autant plus que l'optimisation porte sur le " vecteur " h_l et non sur la seule donnée monodimensionnelle u .

5.2.2 Optimisation non linéaire des équations de Boltzmann en temps courts

Dans le principe, nous nous appuierons sur la pré-publication [42] pour calculer l'opérateur adjoint de l'équation de Boltzmann. Il y est en particulier montré, que l'équation adjointe continue de Boltzmann a la même structure que l'équation d'état (5.117) en "remontant le temps" de T à 0, soit :

$$-\frac{\partial \tilde{f}(x, t)}{\partial t} - v \frac{\partial \tilde{f}(x, t)}{\partial x} = -\frac{1}{\lambda}(\tilde{f}(x, t) - \tilde{f}^{eq}) \quad (5.123)$$

Avec la fonction \tilde{f}^{eq} fonction d'équilibre adjointe définie par :

$$\tilde{f}^{eq} = \frac{\partial f^{eq}}{\partial f} \tilde{f} \quad (5.124)$$

On peut [42], en conséquence, appliquer la même dérivation que pour l'équation d'état (projection sur une base tronquée de polynômes d'Hermite et d'une quadrature de Gauss-Hermite dans l'espace des vitesses), afin de transformer la forme adjointe continue en forme adjointe à vitesses discrètes :

$$-\frac{\partial \tilde{f}_l(x, t)}{\partial t} - c_l \frac{\partial \tilde{f}_l(x, t)}{\partial x} = -\frac{1}{\lambda}(\tilde{f}_l(x, t) - \tilde{f}_l^{eq}) \quad (5.125)$$

Nous utiliserons donc cette forme en vitesses discrètes.

Le calcul sera toutefois repris pour plusieurs raisons :

- réduction à une dimension pour son application au réseau D1Q3, utilisé depuis le début.

- décomposition des fonctions f_l en composantes stationnaires \bar{f}_l et fluctuantes f'_l [23] ce qui amènera à calculer la forme adjointe de : $(f_l^{eq} - \bar{f}_l^{eq})$ plutôt que (f_l^{eq}) ce qui n'est pas fait dans [42].
- prise en compte des conditions aux limites périodiques (modes résonants) différentes des conditions à l'infini prises dans le paragraphe précédent.
- choix d'une bonne fonction \mathcal{I} à optimiser.
- intégration de ces différents paramètres dans l'écriture de la fonctionnelle de Lagrange \mathcal{L} , dont on calculera les variations.

Posons les différentes contraintes de cette fonctionnelle :

Equation d'état :

$$F_l(f'_l(x, t)) = \frac{\partial f'_l(x, t)}{\partial t} + c_l \frac{\partial f'_l(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{\lambda} (f'_l(x, t) - (f_l^{eq} - \bar{f}_l^{eq})) = 0 \quad (5.126)$$

Conditions périodiques à la frontière du domaine $[0, L]$:

$$f'_l(0, t) - f'_l(L, t) = 0 \quad (5.127)$$

Conditions initiales :

$$G_l(f'_l, f_l'^0) = f'_l(x, 0) - f_l'^0(x) = 0 \quad (5.128)$$

L'objectif fonctionnel idéal serait d'utiliser, pour fonction \mathcal{I} à optimiser, le rapport de l'énergie de la perturbation au temps T sur l'énergie initiale soit :

$$\mathcal{I}(u') = \frac{E(u'(T))}{E(u'(0))} = \frac{\left[\frac{1}{2} \int_0^L u'(x, T)^2 dx \right]}{\left[\frac{1}{2} \int_0^L u'(x, 0)^2 dx \right]} \quad (5.129)$$

On rappelle que :

$$u'(x, T) = \frac{\sum (c_l f'_l(x, T)) - \bar{u} \sum f'_l(x, T)}{\bar{\rho} + \sum f'_l(x, T)} \quad (5.130)$$

$$u'(x, 0) = \frac{\sum (c_l f'_l(x, 0)) - \bar{u} \sum f'_l(x, 0)}{\bar{\rho} + \sum f'_l(x, 0)} \quad (5.131)$$

et [42] que :

$$\sum_l f'_l(x, t) = \sum_l h_l(x, t) \quad (5.132)$$

$$\text{et} \quad (5.133)$$

$$\sum_l c_l f'_l(x, t) = \sum_l c_l h_l(x, t) \quad (5.134)$$

On utilisera la fonction f'_j pour la suite du développement :

Il est évident que les dérivées de cette fonction $\mathcal{I}(u')$ par rapport aux f'_j vont être complexes. Dans une première étape, on prendra comme fonction à optimiser :

$$\mathcal{I}(f') = \mathcal{I} = \frac{E(f'(T))}{E(f'(0))} = \frac{\left[\sum_l \int_0^L f'_l(x, T)^2 dx \right]}{\left[\sum_l \int_0^L f'_l(x, 0)^2 dx \right]} \quad (5.135)$$

(On a pu vérifier que les cartes d'instabilité de cette fonction sont peu différentes de celles issues de $u'(x, T)$ et $u'(x, 0)$ chapitre 4).

On écrira donc la fonctionnelle de Lagrange \mathcal{L} , [41], avec les multiplicateurs $\tilde{f}'_l(x, t)$, $\tilde{f}'^0_l(x)$ et la même définition des produits scalaires.

Le domaine \mathcal{D} étant $[0, T] \times [0, L]$:

$$\langle a, b \rangle_{\mathcal{D}} = \int_0^T \int_0^L a b \, dx \, dt \quad (5.136)$$

$$(a, b)_t = \int_0^T a b \, dt \quad (5.137)$$

$$\mathcal{L}[f'_l, \tilde{f}'^0_l, \tilde{f}'_l, \tilde{f}'^0_l] = \mathcal{I}(f'_l, \tilde{f}'^0_l) - \langle F(f'_l), \tilde{f}'_l \rangle_{\mathcal{D}} - (G(f'_l, \tilde{f}'^0_l), \tilde{f}'^0_l)_t \quad (5.138)$$

On calcule les variations de \mathcal{L} par rapport aux variations de $f'_j(x, t)$, $f'_j(x, 0)$, $\tilde{f}'_j(x, t)$, $\tilde{f}'_j(x, 0)$.

Les variations de \mathcal{L} par rapport aux variations de $\tilde{f}'_j(x, t)$, $\tilde{f}'_j(x, 0)$ redonnent les contraintes portant sur :

- l'équation d'état $F_l(f'_l(x, t)) = 0$
- les conditions initiales $G_l(f'_l(x, 0), \tilde{f}'^0_l(x)) = 0$.

Les variations de \mathcal{L} par rapport aux variations de $f'_j(x, t)$, $f'_j(x, 0)$ pour $j = 1, 3$ vont nous donner les fonctions recherchées : équations adjointes, conditions initiales et conditions périodiques à la frontière pour le problème adjoint.

Les variations par rapport à $f'_j(x, t)$ sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'_j(x, t)} \delta f'_j(x, t) &= \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial f'_j(x, t)} \delta f'_j(x, t) \\ &- \sum_l \left\langle \frac{\partial F_l(f'_l(x, t))}{\partial f'_j(x, t)} \delta f'_j(x, t), \tilde{f}'_l(x, t) \right\rangle_{\mathcal{D}} - \sum_l \left(\frac{\partial G_l(f'_l(x, 0), \tilde{f}'^0_l(x))}{\partial f'_j(x, t)} \delta f'_j(x, t), \tilde{f}'^0_l(x) \right)_t \end{aligned} \quad (5.139)$$

Nous allons calculer chacun des termes :

- premier terme :

$$\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial f'_j(x, t)} \delta f'_j(x, t) \quad (5.140)$$

$$\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial f'_j(x, t)} \delta f'_j(x, t) = \frac{1}{E(f'(0))} \int_0^L f'_l(x, T) \delta f'_j(x, T) dx \quad (5.141)$$

– second terme :

$$\sum_l \left\langle \frac{\partial F_l(f'_l(x, t))}{\partial f'_j(x, t)} \delta f'_j(x, t), \tilde{f}'_l(x, t) \right\rangle_{\mathcal{D}} \quad (5.142)$$

Soit, sans détailler les intégrations par parties de [42] mais en reprenant dans celles ci les calculs pour les bornes en $t = 0$ et en $x = L$:

$$\begin{aligned} \sum_l \left\langle \frac{\partial F_l(f'_l(x, t))}{\partial f'_j(x, t)} \delta f'_j(x, t), \tilde{f}'_l(x, t) \right\rangle_{\mathcal{D}} = & \\ & \sum_l \int_0^T \int_0^L \left[\frac{\partial}{\partial f'_j} \frac{\partial f'_l(x, t)}{\partial t} + c_l \frac{\partial}{\partial f'_j} \frac{\partial f'_l(x, t)}{\partial x} \right] \delta f'_j(x, t) \tilde{f}'_l(x, t) dx dt \\ & + \sum_l \int_0^T \int_0^L \frac{1}{\lambda} \left[\frac{\partial f'_l(x, t)}{\partial f'_j} - \left(\frac{\partial (f_l^{eq} - \bar{f}_l^{eq})}{\partial f'_j} \right) \right] \delta f'_j(x, t) \tilde{f}'_l(x, t) dx dt \quad (5.143) \end{aligned}$$

Nous avons intégré par parties les 2 premières intégrales, en transportant les dérivées sur $f'_l(x, t)$,

On obtient alors pour la première intégrale :

$$\begin{aligned} \sum_l \int_0^T \int_0^L \frac{\partial}{\partial f'_j} \frac{\partial f'_l(x, t)}{\partial t} \tilde{f}'_l dx dt & \\ = \sum_l \int_0^L [\delta(j, l) \delta f'_j(x, t) \tilde{f}'_l(x, t)]_0^T - \sum_l \int_0^T \int_0^L \delta(j, l) \frac{\partial \tilde{f}'_l(x, t)}{\partial t} \delta f'_j(x, t) dx dt & \\ = \int_0^L [\delta f'_j(x, t) \tilde{f}'_j(x, t)]_0^T dx - \int_0^T \int_0^L \frac{\partial \tilde{f}'_j(x, t)}{\partial t} \delta f'_j(x, t) dx dt \quad (5.144) \end{aligned}$$

On obtient pour la seconde intégrale :

$$\begin{aligned} \sum_l \int_0^T \int_0^L c_l \frac{\partial}{\partial f'_j} \frac{\partial f'_l(x, t)}{\partial x} \tilde{f}'_l dx dt & \\ = \sum_l \int_0^T [c_l \delta(j, l) \delta f'_j(x, t) \tilde{f}'_l(x, t)]_0^L - \sum_l \int_0^T \int_0^L c_l \delta(j, l) \frac{\partial \tilde{f}'_l(x, t)}{\partial x} \delta f'_j(x, t) dx dt & \\ = \int_0^T [c_j \delta f'_j(x, t) \tilde{f}'_j(x, t)]_0^L - \int_0^T \int_0^L c_j \frac{\partial \tilde{f}'_j(x, t)}{\partial x} \delta f'_j(x, t) dx dt \quad (5.145) \end{aligned}$$

On obtient pour la troisième intégrale :

$$\sum_l \int_0^T \int_0^L \frac{1}{\lambda} \frac{\partial f'_l(x, t)}{\partial f'_j} \delta f'_j(x, t) \tilde{f}'_l(x, t) dx dt = \sum_l \int_0^T \int_0^L \frac{1}{\lambda} \delta(l, j) \delta f'_j(x, t) \tilde{f}'_l(x, t) dx dt \quad (5.146)$$

$$= \int_0^T \int_0^L \left(\frac{1}{\lambda} \delta f'_j(x, t) \right) \tilde{f}'_j(x, t) dx dt \quad (5.147)$$

On peut également remarquer que le terme stationnaire \bar{f}_l^{eq} ne dépend pas de f'_j et donc que :

La quatrième et dernière intégrale :

$$\sum_l \int_0^T \int_0^L -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial (f_l^{eq} - \bar{f}_l^{eq})}{\partial f'_j} \delta f'_j(x, t) \tilde{f}'_l(x, t) dx dt \quad (5.148)$$

se limite à :

$$+ \sum_l \int_0^T \int_0^L -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial f_l^{eq}}{\partial f'_j} \delta f'_j(x, t) \tilde{f}'_l(x, t) dx dt \quad (5.149)$$

On aura finalement pour le terme :

$$\sum_l \left\langle \frac{\partial F_l(f'_l(x, t))}{\partial f'_j(x, t)} \delta f'_j(x, t), \tilde{f}'_l(x, t) \right\rangle_{\mathcal{D}} \quad (5.150)$$

$$\begin{aligned} \sum_l \left\langle \frac{\partial F_l(f'_l(x, t))}{\partial f'_j(x, t)} \delta f'_j(x, t), \tilde{f}'_l(x, t) \right\rangle_{\mathcal{D}} = & \int_0^T \int_0^L \left[-\frac{\partial \tilde{f}'_j(x, t)}{\partial t} - c_j \frac{\partial \tilde{f}'_j(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{\lambda} \tilde{f}'_j \right] \delta f'_j(x, t) dx dt \\ & - \sum_l \int_0^T \int_0^L \frac{1}{\lambda} \left[\frac{\partial f_l^{eq}}{\partial f'_j} \delta f'_j(x, t) \right] \tilde{f}'_l(x, t) dx dt \\ & + \int_0^L [\delta f'_j(x, t) \tilde{f}'_j(x, t)]_0^T dx + \int_0^T [c_j \delta f'_j(x, t) \tilde{f}'_j(x, t)]_0^L dt \quad (5.151) \end{aligned}$$

Développons les 2 derniers termes :

$$\int_0^L [\delta f'_j(x, t) \tilde{f}'_j(x, t)]_0^T dx = \int_0^L [\delta f'_j(x, T) \tilde{f}'_j(x, T) - \delta f'_j(x, 0) \tilde{f}'_j(x, 0)] dx \quad (5.152)$$

$$\int_0^T [\delta f'_j(x, t) \tilde{f}'_j(x, t)]_0^L dt = \int_0^T [\delta f'_j(L, t) \tilde{f}'_j(L, t) - \delta f'_j(0, t) \tilde{f}'_j(0, t)] dt \quad (5.153)$$

Avec la condition limite : (5.127), on a :

$$\delta f'_l(L, t) = \delta f'_l(0, t) \quad (5.154)$$

$$\int_0^T c_j [\delta f'_j(x, t) \tilde{f}'_j(x, t)]_0^L dt = \int_0^T c_j [\tilde{f}'_j(L, t) - \tilde{f}'_j(0, t)] \delta f'_j(0, t) dt \quad (5.155)$$

Le troisième terme de l'équation (5.139) est développé :

$$\sum_l \left(\frac{\partial G_l(f'_l(x, 0), f_l'^0)}{\partial f'_j(x, t)} \delta f'_j(x, t), f_l'^0(x) \right)_x \quad (5.156)$$

Soit :

$$\begin{aligned} \sum_l \left(\frac{\partial G_l(f'_l(x, 0), f_l'^0)}{\partial f'_j(x, t)} \delta f'_j(x, t), f_l'^0(x) \right)_x = \\ \sum_l \int_0^L \delta(l, j) \frac{\partial}{\partial f'_j(x, t)} [f'_l(x, 0) - f_l'^0(x)] \delta f'_j(x, t) \tilde{f}_l'^0(x) dx \end{aligned} \quad (5.157)$$

Soit :

$$\sum_l \left(\frac{\partial G_l(f'_l(x, 0), f_l'^0)}{\partial f'_j(x, t)} \delta f'_j(x, t), f_l'^0(x) \right)_x = \int_0^L \delta f'_j(x, 0) \tilde{f}_l'^0(x) dx \quad (5.158)$$

Les variations totales de \mathcal{L} par rapport à $f'_j(x, t)$ s'écrivent en final :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'_j(x, t)} \delta f'_j(x, t) = \int_0^L \left(\frac{f'_j(x, T)}{E(f'(0))} - \tilde{f}'_j(x, T) \right) \delta f'_j(x, T) dx \\ + \int_0^L [\tilde{f}'_j(x, 0) - \tilde{f}_j'^0] \delta f'_j(x, 0) dx + \int_0^T c_j [\tilde{f}'_j(L, t) - \tilde{f}'_j(0, t)] \delta f'_j(0, t) dt \\ + \int_0^T \int_0^L \left[\frac{\partial \tilde{f}'_j(x, t)}{\partial x} - c_j \frac{\partial \tilde{f}'_j(x, t)}{\partial x} - \frac{1}{\lambda} (\tilde{f}'_j - \sum_l \frac{\partial f_l^{eq}}{\partial f'_j} \tilde{f}'_l) \right] \delta f'_j(x, t) dx dt \end{aligned} \quad (5.159)$$

Le gradient de \mathcal{L} doit être nul quelque soit $\delta f'_j(x, t)$:

En annulant le facteur de $\delta f'_j(x, t)$, on obtient les équations adjointes :

$$\frac{\partial \tilde{f}'_j(x, t)}{\partial x} + c_j \frac{\partial \tilde{f}'_j(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{\lambda} (\tilde{f}'_j - \sum_l \frac{\partial f_l^{eq}}{\partial f'_j} \tilde{f}'_l(x, t)) \quad (5.160)$$

En annulant le facteur de $\delta f'_j(x, T)$, on obtient les conditions initiales des équations adjointes :

$$\tilde{f}'_j(x, T) = \frac{1}{E(f'(0))} f'_j(x, T) \quad (5.161)$$

En annulant le facteur de $\delta f'_j(x, 0)$, on obtient les conditions finales des équations adjointes :

$$\tilde{f}'_j(x, 0) = \tilde{f}'_j{}^0(x) \quad (5.162)$$

En annulant le facteur de $\delta f'_j(0, t)$, on obtient les conditions périodiques des équations adjointes :

$$\tilde{f}'_j(L, t) = \tilde{f}'_j(0, t) \quad (5.163)$$

On calculera, maintenant les variations de \mathcal{L} par rapport à $f'_j{}^0(x)$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'_j{}^0(x)} \delta f'_j{}^0(x) = \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial f'_j{}^0(x)} \delta f'_j{}^0(x) - \sum_l \left(\frac{\partial G(f'_l(x, 0), f'_l{}^0(x))}{\partial f'_j{}^0(x)} \delta f'_j{}^0(x), \tilde{f}'_l{}^0(x) \right)_t \quad (5.164)$$

Calculons chacun des termes :

$$\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial f'_j{}^0(x)} \delta f'_j{}^0(x) = - \frac{E(f'(T))}{[E(f'^0)]^2} \int_0^L f'_j{}^0(x) \delta f'_j{}^0(x) dx \quad (5.165)$$

$$\sum_l \left(\frac{\partial G(f'_l(x, 0), f'_l{}^0(x))}{\partial f'_j{}^0(x)} \delta f'_j{}^0(x), \tilde{f}'_l{}^0(x) \right)_t = \int_0^L \tilde{f}'_j{}^0(x) \delta f'_j{}^0(x) dx \quad (5.166)$$

Les variations totales par rapport à $f'_j{}^0(x)$ sont :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'_j{}^0(x)} \delta f'_j{}^0(x) = \int_0^L \left[- \frac{E(f'(T))}{[E(f'^0)]^2} f'_j{}^0(x) + \tilde{f}'_j{}^0(x) \right] \delta f'_j{}^0(x) dx \quad (5.167)$$

Le gradient de \mathcal{L} doit être nul quelque soit $\delta f'_j(x, t)$:

En annulant le facteur de $\delta f'_j(x, 0)$, on obtient les conditions finales des équations adjointes :

$$\tilde{f}'_j{}^0(x) = \frac{E(f'(T))}{[E(f'^0)]^2} f'_j{}^0(x) = \tilde{f}'_j(x, 0) \quad (5.168)$$

On obtient enfin le schéma d'optimisation de la croissance pour les équations de Boltzmann non linéaires (5.5) :

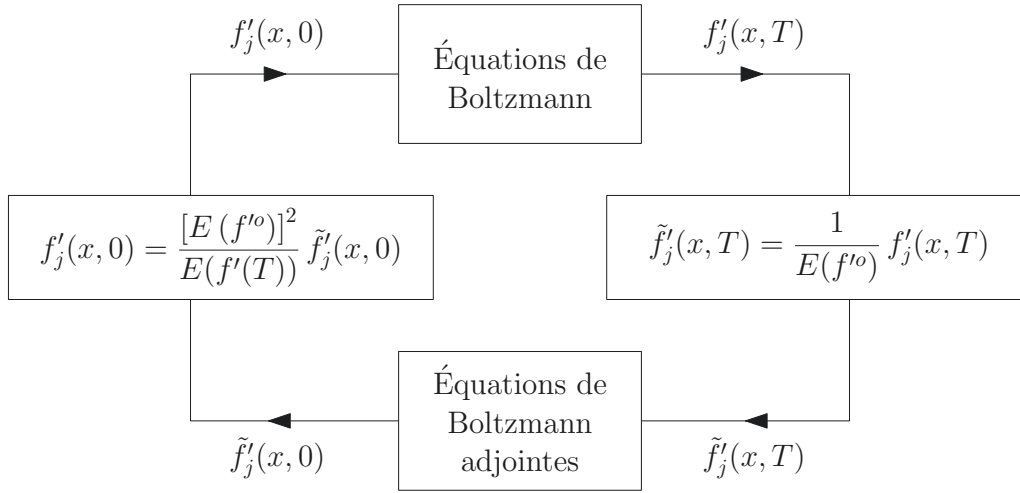


FIGURE 5.5 – Schéma d’optimisation de la croissance pour les équations de Boltzmann non linéaires

Il reste à calculer le terme :

$$f_j^{eq} = \sum_l \frac{\partial f_l^{eq}}{\partial f_j'} \tilde{f}_l'(x, t) \quad (5.169)$$

Nous reprendrons pour ce faire, en l’appliquant au réseau $D1Q3$, la méthode de [42].

La fonction d’équilibre f_l^{eq} s’écrit (3.71) :

$$f_l^{eq}(\rho, u) = w_l \rho \left(1 + \frac{c_l u}{c_s^2} + \frac{1}{2c_s^4} (c_l u)^2 - \frac{1}{2c_s^2} u^2 \right) \quad (5.170)$$

On calcule les dérivées préalables suivantes de $\rho, \rho u, u$ par rapport à f_j'

$$\frac{\partial \rho}{\partial f_j'} = \frac{\partial \sum f_l}{\partial f_j'} = \delta(l, j) = 1 \quad (5.171)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial f_j'} = \frac{\partial \sum c_l f_l}{\partial f_j'} = c_l \delta(l, j) = c_j \quad (5.172)$$

On a aussi :

$$\frac{\partial \rho u}{\partial f_j'} = u \frac{\partial \rho}{\partial f_j'} + \rho \frac{\partial u}{\partial f_j'} = u + \rho \frac{\partial u}{\partial f_j'} = c_j \quad (5.173)$$

Soit :

$$\frac{\partial u}{\partial f_j'} = \frac{1}{\rho} (c_j - u) \quad (5.174)$$

On a donc :

$$\frac{\partial f_l^{eq}}{\partial f_j'}(\rho, u) = w_l \left(\frac{\partial \rho}{\partial f_j'} + \frac{c_l}{c_s^2} \frac{\partial \rho u}{\partial f_j'} + \left(\frac{c_l^2}{2c_s^4} - \frac{1}{2c_s^2} \right) \frac{\partial \rho u^2}{\partial f_j'} \right) \quad (5.175)$$

Il reste à calculer :

$$\frac{\partial \rho u^2}{\partial f_j'} = 2\rho u \frac{\partial u}{\partial f_j'} + u^2 = 2uc_j - u^2 \quad (5.176)$$

$$\frac{\partial f_l^{eq}}{\partial f_j'}(\rho, u) = w_l \left[1 + \frac{c_l c_j}{c_s^2} + \left(\frac{c_l^2 - c_s^2}{2c_s^4} \right) (2uc_j - u^2) \right] \quad (5.177)$$

On peut maintenant écrire le terme :

$$\tilde{f}_j^{eq} = \sum_l \frac{\partial f_l^{eq}}{\partial f_j'} \tilde{f}_l'(x, t) \quad (5.178)$$

$$\tilde{f}_j^{eq} = \sum_l \frac{\partial f_l^{eq}}{\partial f_j'} \tilde{f}_l'(x, t) \quad (5.179)$$

$$= \sum_l w_l \tilde{f}_l'(x, t) \left[1 - \frac{1}{2c_s^4} (c_l^2 - c_s^2) u^2 \right] + \sum_l w_l \tilde{f}_l'(x, t) \left[c_l + \frac{1}{c_s^2} (c_l^2 - c_s^2) u \frac{c_j}{c_s^2} \right] \quad (5.180)$$

On posera les définitions suivantes [42] :

$$\tilde{\rho} = \sum_l w_l \tilde{f}_l'(x, t) \left[1 - \frac{1}{2c_s^4} (c_l^2 - c_s^2) u^2 \right] \quad (5.181)$$

$$\tilde{\rho} u = \sum_l w_l \tilde{f}_l'(x, t) \left[c_l + \frac{1}{c_s^2} (c_l^2 - c_s^2) u \right] \quad (5.182)$$

On pourra ainsi écrire simplement :

$$\tilde{f}_j^{eq} = \tilde{\rho} + \tilde{\rho} u \frac{c_j}{c_s^2} \quad (5.183)$$

A partir des équations (5.181) et (5.183), nous calculons l'expression en D1Q3 des 3 fonctions : $\tilde{f}_1^{eq}, \tilde{f}_2^{eq}, \tilde{f}_3^{eq}$ à partir des paramètres suivants : w_l, c_l, c_s dont nous rappelons les valeurs :

$$w_1 = \frac{2}{3}, w_2 = \frac{1}{6}, w_3 = \frac{1}{6} \quad (5.184)$$

$$c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = -1, c_s^2 = \frac{1}{3} \quad (5.185)$$

$\tilde{\rho}$ et $\tilde{\rho}u$ s'écrivent en fonction des fonctions $\tilde{f}_1^{eq}, \tilde{f}_2^{eq}, \tilde{f}_3^{eq}$:

$$\tilde{\rho} = \left(\frac{2}{3} + u^2\right)\tilde{f}_1' + \left(\frac{1}{6} - \frac{u^2}{2}\right)\tilde{f}_2' + \left(\frac{1}{6} - \frac{u^2}{2}\right)\tilde{f}_3' \quad (5.186)$$

$$\tilde{\rho}u = -\frac{2}{3}u\tilde{f}_1' + \left(\frac{1}{6} + \frac{u}{3}\right)\tilde{f}_2' + \left(-\frac{1}{6} + \frac{u}{3}\right)\tilde{f}_3' \quad (5.187)$$

En reportant ces valeurs de $\tilde{\rho}$ et $\tilde{\rho}u$ dans l'équation (5.183), on obtient :

$$\tilde{f}_1^{eq} = \left(\frac{2}{3} + u^2\right)\tilde{f}_1' + \left(\frac{1}{6} - \frac{u^2}{2}\right)\tilde{f}_2' + \left(\frac{1}{6} - \frac{u^2}{2}\right)\tilde{f}_3' \quad (5.188)$$

$$\tilde{f}_2^{eq} = \left(\frac{2}{3} + u^2\right)\tilde{f}_1' + \left(\frac{1}{6} - \frac{u^2}{2}\right)\tilde{f}_2' + \left(\frac{1}{6} - \frac{u^2}{2}\right)\tilde{f}_3' + 3\left(-\frac{2}{3}u\tilde{f}_1' + \left(\frac{1}{6} + \frac{u}{3}\right)\tilde{f}_2' + \left(-\frac{1}{6} + \frac{u}{3}\right)\tilde{f}_3'\right) \quad (5.189)$$

$$= \left(\frac{2}{3} - 2u + u^2\right)\tilde{f}_1' + \left(\frac{2}{3} + u - u^2\right)\tilde{f}_2' + \left(-\frac{1}{3} + u - u^2\right)\tilde{f}_3' \quad (5.190)$$

$$\tilde{f}_3^{eq} = \left(\frac{2}{3} + u^2\right)\tilde{f}_1' + \left(\frac{1}{6} - \frac{u^2}{2}\right)\tilde{f}_2' + \left(\frac{1}{6} - \frac{u^2}{2}\right)\tilde{f}_3' - 3\left(-\frac{2}{3}u\tilde{f}_1' + \left(\frac{1}{6} + \frac{u}{3}\right)\tilde{f}_2' + \left(-\frac{1}{6} + \frac{u}{3}\right)\tilde{f}_3'\right) \quad (5.191)$$

$$= \left(\frac{2}{3} + 2u + u^2\right)\tilde{f}_1' + \left(-\frac{1}{3} - u - u^2\right)\tilde{f}_2' + \left(\frac{2}{3} - u - u^2\right)\tilde{f}_3' \quad (5.192)$$

L'équation de Boltzmann adjointe, discrétisée en vitesses, en espace et en temps a la même structure que l'équation (4.12) en temps inversé.

Elle s'écrit :

$$\tilde{f}_j'(x - c_j, t - 1) = (1 - \omega)\tilde{f}_j'(x, t) + \omega\tilde{f}_j^{eq}(\tilde{f}_l'(x, t)) \quad (5.193)$$

qu'on peut donc écrire :

$$\tilde{f}_j'(x - c_j, t - 1) = a_j\tilde{f}_1'(x, t) + b_j\tilde{f}_2'(x, t) + c_j\tilde{f}_3'(x, t) \quad (5.194)$$

On donnera les coefficients a_j, b_j, c_j :

$$a_1 = [1 - \omega(\frac{1}{3} - u^2)], b_1 = \omega[\frac{1}{6} - \frac{u^2}{2}], c_1 = \omega[\frac{1}{6} - \frac{u^2}{2}] \quad (5.195)$$

$$a_2 = [\omega(\frac{2}{3} - 2u + u^2)], b_2 = [1 - \omega(\frac{1}{3} - u + \frac{u^2}{2})], c_2 = [\omega(-\frac{1}{3} + u - \frac{u^2}{2})] \quad (5.196)$$

$$a_3 = [\omega(\frac{2}{3} + 2u + u^2)], b_3 = [\omega(-\frac{1}{3} - u - \frac{u^2}{2})], c_3 = [1 + \omega(-\frac{1}{3} - u - \frac{u^2}{2})] \quad (5.197)$$

On remarque que ces termes sont identiques à ceux calculés dans (5.53) mais avec les matrices $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ égales à :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & b_1 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix} \quad (5.198)$$

On a maintenant toutes les ” pierres ” pour construire l’algorithme d’optimisation en modes résonants (2 modes) dont nous allons décrire les différentes phases :

- Phase 1 Initialisation (” initiale”, au sens premier pas du schéma d’optimisation) de $h'_l(0, n)$ avec $A_l(0) = \sigma_l(1 + i)$, $B_l(0) = \sigma'_l$.

$$f'_l(0, n) = A_l(0)e^{in\frac{\pi}{2}} + A_l^*(0)e^{-in\frac{\pi}{2}} + B_l(0)e^{in\pi} \quad (5.199)$$

On définit l’énergie initiale $E(0) = \sum_n \sum_l [f'_l(0, n)]^2$.

On normalisera $E(0)$ à 1.

On calcule au temps T , $A_l(T, n + c_l)$ et $B_l(T, n + c_l)$, (Equations de collision et de transport du chapitre 4), tel qu’on obtienne au temps T les fonctions $f'_l(T, n + c_l)$ et puis l’énergie au temps T $E(T) = \sum_n \sum_l [f'_l(T, n)]^2$.

$$f'_l(T, n + c_l) = A_l(T)e^{i(n+c_l)\frac{\pi}{2}} + A_l^*(T)e^{-i(n+c_l)\frac{\pi}{2}} + B_l(T)e^{i(n+c_l)\pi} \quad (5.200)$$

- Phase 2 Calcul de la condition initiale en T pour l’équation adjointe, compte tenu de la normalisation à 1 de $E(0)$:

$$\tilde{f}'_j(x, T) = f'_j(x, T) \quad (5.201)$$

On en déduit la condition initiale pour les équations adjointes :

$$\tilde{f}'_l(T, n) = \tilde{A}_l(T)e^{in\frac{\pi}{2}} + \tilde{A}_l^*(T)e^{-in\frac{\pi}{2}} + \tilde{B}_l(T)e^{in\pi} \quad (5.202)$$

- Phase 3 A partir des équations adjointes linéaires :

$$\tilde{f}'_j(m - 1, n - c_l) = a_j \tilde{f}'_1(m, n) + b_j \tilde{f}'_2(m, n) + c_j \tilde{f}'_3(m, n) \quad (5.203)$$

On reprend l’équation (5.194).

En écrivant les fonctions adjointes $\tilde{f}'_j(m, n)$ sur les modes résonants :

$$\tilde{f}'_j(m, n) = \tilde{A}_j(m)e^{in\frac{\pi}{2}} + \tilde{A}_j^*(m)e^{-in\frac{\pi}{2}} + \tilde{B}_j(m)e^{in\pi} \quad (5.204)$$

On cherche $\tilde{A}_j(m - 1, n - c_l)$ et $\tilde{B}_j(m - 1, n - c_l)$, tels que :

$$\tilde{f}'_j(m - 1, n - c_j) = \tilde{A}_j(m - 1)e^{i(n-c_j)\frac{\pi}{2}} + \tilde{A}_j^*(m - 1)e^{-i(n-c_j)\frac{\pi}{2}} + \tilde{B}_j(m - 1)e^{i(n-c_j)\pi} \quad (5.205)$$

On obtient, en reportant $\tilde{f}'_j(m - 1, n - c_j)$ et $\tilde{f}'_j(m, n)$ dans l’équation (5.194) et en égalant les termes en $e^{in\frac{\pi}{2}}, e^{-in\frac{\pi}{2}}, e^{in\pi}$:

$$\tilde{A}_j(m - 1) = e^{ic_j\frac{\pi}{2}} [a_j \tilde{A}_1(m) + b_j \tilde{A}_2(m) + c_j \tilde{A}_3(m)] \quad (5.206)$$

$$\tilde{A}_j^*(m - 1) = e^{-ic_j\frac{\pi}{2}} [a_j \tilde{A}_1^*(m) + b_j \tilde{A}_2^*(m) + c_j \tilde{A}_3^*(m)] \quad (5.207)$$

$$\tilde{B}_j(m - 1) = e^{ic_j\pi} [a_j \tilde{B}_1(m) + b_j \tilde{B}_2(m) + c_j \tilde{B}_3(m)] \quad (5.208)$$

$$(5.209)$$

On doit réaliser le transport de ces termes. Car, pour fermer le système résonant, on a introduit la parité de n dans l'équation des conditions initiales du système adjoint (5.201). La parité se propage dans les équations (5.206) et oblige comme pour le système direct à réaliser le transport qui fait passer des termes pairs à des termes impairs ou inversement pour les vitesses $c_l, l = 2, 3$

On remonte, donc le temps de T à 0 pour obtenir : $\tilde{A}_l(0), \tilde{A}_l^*(0), \tilde{B}_l(0)$, et donc $\tilde{f}'_j(0, n)$.

- Phase 4 On calcule les nouvelles conditions initiales du système direct :

$$f'_j(0, n) = \frac{1}{E(f'(T))} \tilde{f}'_j(0, n) \quad (5.210)$$

On calculera la nouvelle énergie initiale que l'on normalisera à 1.

- Phase 5 On arrêtera l'optimisation après stabilisation de l'énergie.

Les variables à définir sont :

- Les conditions initiales à la première boucle σ_l, σ'_l
- Le choix de \bar{u}
- Le choix des bornes de T

Les figures (5.6) et Les figures (5.7) montrent un résultat obtenu sur $G(T) = \frac{E(f'(T))}{E(f'(0))} = E(f'(T))$ avec les paramètres suivants : $50\delta\bar{u}$ avec $\delta\bar{u} = 0.005$, la condition initiale n'intervient pas compte tenu de la normalisation de l'énergie initiale à 1, le nombre de pas d'espace a été pris à 128, le temps a couru entre 0 et 25.

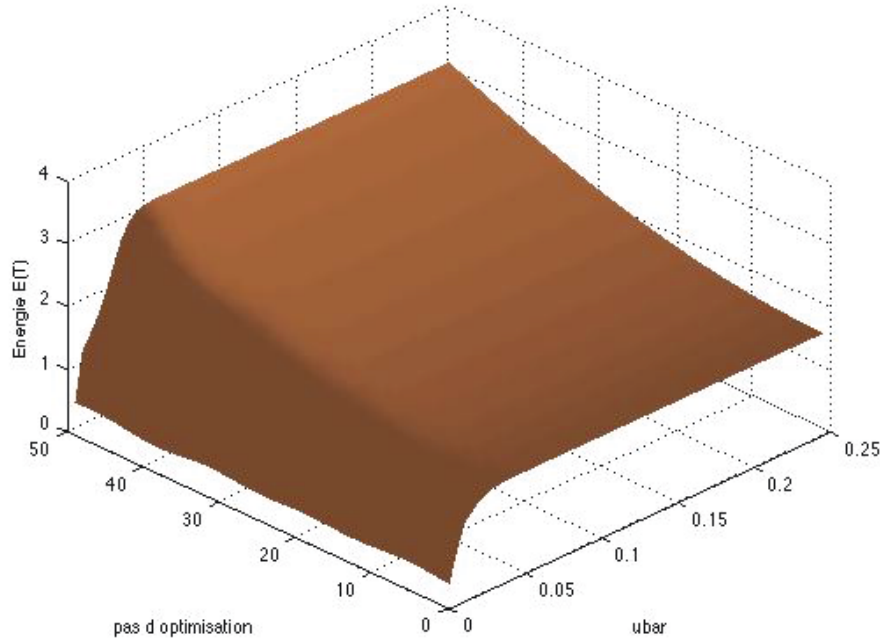


FIGURE 5.6 – Evolution de $G(T) = E(T)$ en fonction du nombre de pas (npas) d'optimisation et de \bar{u} ,

$$\bar{u} = [0, 0.25], npas = [0, 50]$$

Nous avons également calculé sur $[0, T]$ le maximum de $Gmax(0, T) = \frac{E(f'(t))}{E(f'(0))} = E(f'(t))$ pour chaque pas d'optimisation. Les figures (5.8) et Les figures (5.9) montrent un résultat obtenu sur $Gmax(0, T) = \frac{E(f'(t))}{E(f'(0))} = E(f'(t))$ avec les paramètres suivants : $50\delta\bar{u}$ avec $\delta\bar{u} =$

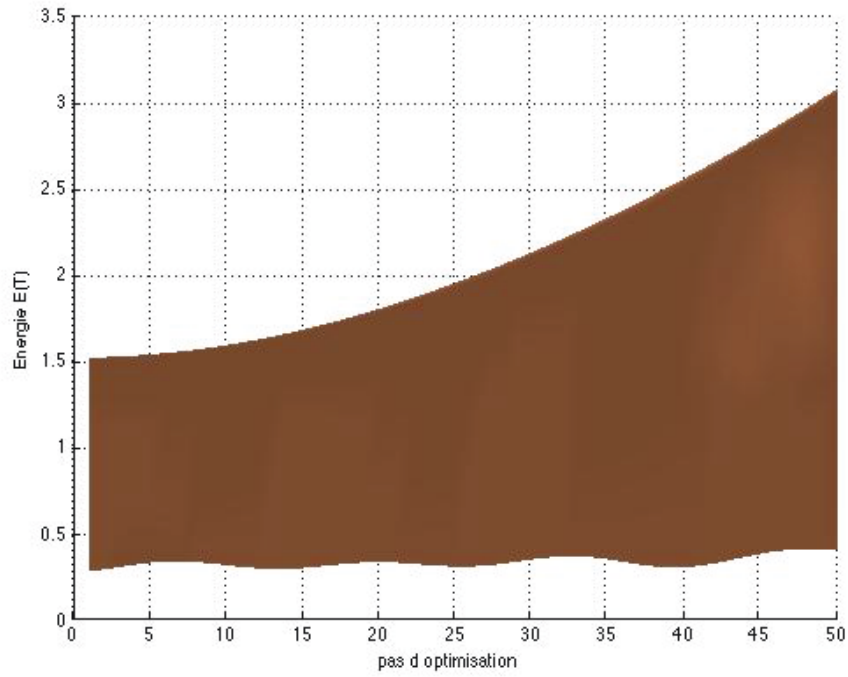


FIGURE 5.7 – Evolution de $G(T) = E(T)$, profil, en fonction du nombre de pas (npas) d'optimisation,
 $\bar{u} = [0, 0.25], npas = [0, 50]$

0.005, la condition initiale n'intervient pas compte tenu de la normalisation de l'énergie initiale à 1, le nombre de pas d'espace a été pris à 128, le temps a couru entre 0 et 25.

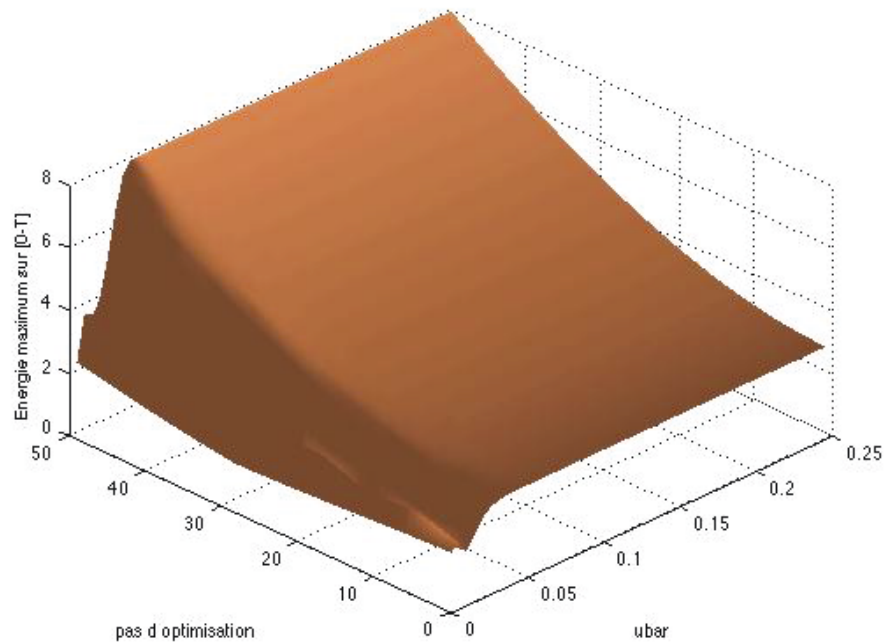


FIGURE 5.8 – Evolution de $Gmax(0, T) = E(T)$ en fonction du nombre de pas (npas) d'optimisation et de \bar{u} ,
 $\bar{u} = [0, 0.25], npas = [0, 50]$

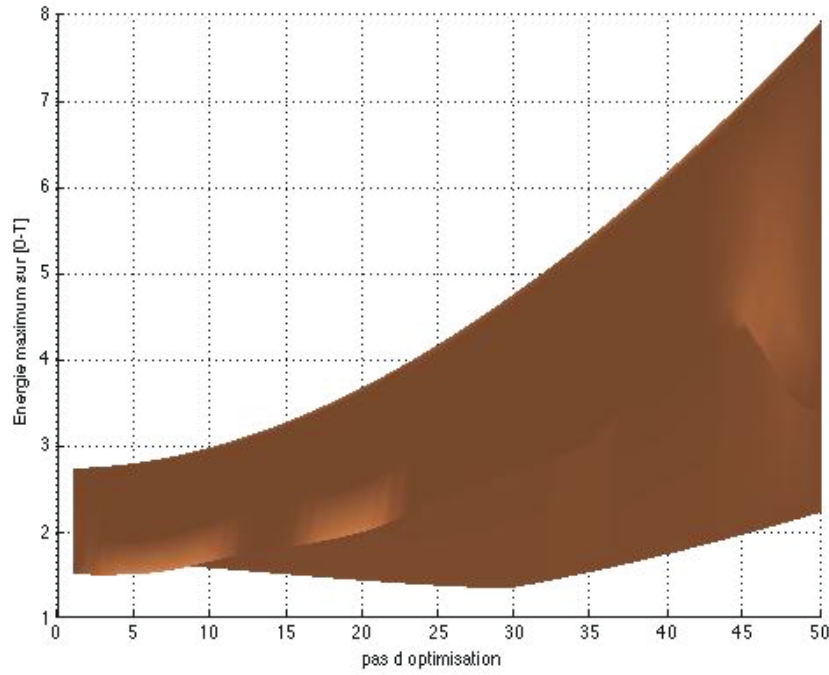


FIGURE 5.9 – Evolution de $G_{max}(0, T) = E(T)$, profil, en fonction du nombre de pas (npas) d'optimisation,
 $\bar{u} = [0, 0.25], npas = [0, 50]$

Conclusion :

Les calculs sur l'opérateur non normal des équations linéarisées de Boltzmann ont montré l'existence en temps courts d'amplifications transitoires dans des zones stables. Un développement en contrôle optimal des équations non linéaires en modes résonants de Boltzmann a montré la possibilité d'optimiser les conditions initiales, pour accroître les amplifications.

Boltzmann 2D

On a vu que la méthode des ondes résonantes fonctionnait pour le réseau D1Q3. Ce réseau est peu représentatif de phénomènes physiques. Nous testerons cette méthode sur le réseau D2Q9 plus représentatif pour des phénomènes physiques. Il semble évident, par avance, que les équations vont s'allonger, mais cette première étude est une simple étude de faisabilité.

6.1 Définition du modèle D2Q9

Repartons de l'équation de base de Boltzmann continue : $f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{1}{\tau}(f - f^{eq}) \quad (6.1)$$

La procédure pour discrétiser l'équation de Boltzmann BGK, a été, pour le réseau D2Q9, de nombreuses fois explicitée [1, 2].

Le système d'équations pour les valeurs discrétisées de la fonction $f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)$ s'écrit :

$$\frac{\partial f_l}{\partial t} + c_{il} \frac{\partial f_l}{\partial x_i} = -\frac{1}{\tau}(f_l - f_l^{eq}) \quad (6.2)$$

(Avec $c_{il}, l = 1, 9; i = x, y$: coordonnées des 9 vitesses du schéma D2Q9 figure (6.1) et $f_l = f_l(\mathbf{x}, \mathbf{c}_l, t)$).

On décomposera les fonctions de distribution en composantes stationnaires \bar{f}_l et composantes fluctuantes f'_l :

$$f_l = \bar{f}_l + f'_l \text{ avec } \frac{\partial \bar{f}_l}{\partial t} = 0 \quad (6.3)$$

\bar{f}_l est aussi solution de l'équation de Boltzmann en régime stationnaire :

$$c_{il} \frac{\partial \bar{f}_l}{\partial x_i} = -\frac{1}{\tau}(\bar{f}_l - \bar{f}_l^{eq}) \quad (6.4)$$

(Avec $\bar{f}_l^{eq} = f_l^{eq}(\bar{\rho}, \bar{u})$).

On peut réécrire alors (6.2) :

$$\frac{\partial f'_l}{\partial t} + c_{il} \frac{\partial f'_l}{\partial x_i} = -\frac{1}{\tau}f'_l + \frac{1}{\tau}(f_l^{eq} - \bar{f}_l^{eq}) \quad (6.5)$$

La différentielle totale de f'_l en 2D s'écrit :

$$df'_l = \frac{\partial f'_l}{\partial x} dx + \frac{\partial f'_l}{\partial y} dy + \frac{\partial f'_l}{\partial t} dt \quad (6.6)$$

En divisant par dt on obtient la dérivée totale :

$$\frac{df'_l}{dt} = \frac{\partial f'_l}{\partial x} c_{xl} + \frac{\partial f'_l}{\partial y} c_{yl} + \frac{\partial f'_l}{\partial t} \quad (6.7)$$

On peut donc intégrer les 2 membres de l'équation (6.5) entre 0 et Δt :

$$\begin{aligned} f'_l(\mathbf{x} + \mathbf{c}_l \Delta t, t + \Delta t) - f'_l(\mathbf{x}, \mathbf{c}_l, t) = \\ - \frac{1}{\tau} \int_0^{\Delta t} f'_l(\mathbf{x} + \mathbf{c}_l s, t + s) - f_l^{eq}(\mathbf{x} + \mathbf{c}_l s, t + s) + [f_l^{\bar{eq}}(\mathbf{x} + \mathbf{c}_l s, t + s)] ds \end{aligned} \quad (6.8)$$

On intègre l'intégrale du deuxième membre par la méthode des trapèzes soit :

$$\int_s^{s+\Delta s} f_l(s) ds = \frac{\Delta s}{2} [f_l(s, s + \Delta s) + f_l(s)] \quad (6.9)$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} f'_l(\mathbf{x} + \mathbf{c}_l \Delta t, t + \Delta t) - f'_l(\mathbf{x}, \mathbf{c}_l, t) = \\ - \frac{\Delta t}{2} [f'_l(\mathbf{x} + \mathbf{c}_l \Delta t, t + \Delta t) - f_l^{eq}(\mathbf{x} + \mathbf{c}_l \Delta t, t + \Delta t) + f_l^{\bar{eq}}(\mathbf{x} + \mathbf{c}_l \Delta t, t + \Delta t) + f'_l(\mathbf{x}, t) - f_l^{eq}(\mathbf{x}, t) + f_l^{\bar{eq}}(\mathbf{x}, t)] \end{aligned} \quad (6.10)$$

On pose :

$$h_l(\mathbf{x}, t) = f'_l(\mathbf{x}, t) + \frac{\Delta t}{2} [(f'_l(\mathbf{x}, t) - f_l^{eq}(\mathbf{x}, t) + f_l^{\bar{eq}}(\mathbf{x}, t))] \quad (6.11)$$

En posant $\tau_g = \tau + \frac{\Delta t}{2}$, on aboutit à l'équation :

$$h_l(\mathbf{x} + \mathbf{c}_l \Delta t, t + \Delta t) = (1 - \frac{\Delta t}{\tau_g}) h_l(\mathbf{x}, t) + \frac{\Delta t}{\tau_g} (f_l^{eq}(\mathbf{x}, t) - f_l^{\bar{eq}}(\mathbf{x}, t)) \quad (6.12)$$

On discrétisera x, y et t suivant $x = n\Delta x, y = p\Delta y, t = m\Delta t$.

On posera également $\Delta x = c_{xl}\Delta t, \Delta y = c_{yl}\Delta t$ et $\Delta t = 1$

L'équation (6.13) s'écrit sous la forme :

$$h_l(m+1, n+c_{xl}, p+c_{yl}) = (1 - \frac{\Delta t}{\tau_g}) h_l(m, n, p) + \frac{\Delta t}{\tau_g} (f_l^{eq}(\rho, \mathbf{u}) - f_l^{\bar{eq}}(\bar{\rho}, \bar{\mathbf{u}})) \quad (6.13)$$

On pose :

$$\frac{1}{\tau_g} = \omega = \frac{1}{3\nu + \frac{1}{2}} \text{ avec } \nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (6.14)$$

$$h_l(m+1, n+c_{xl}, p+c_{yl}) = (1-\omega)h_l(m, n, p) + \omega(f_l^{eq}(\rho, \mathbf{u}) - f_l^{\bar{eq}}(\bar{\rho}, \bar{\mathbf{u}})) \quad (6.15)$$

Dans le réseau D2Q9 les fonctions d'équilibre à un ordre suffisant pour retrouver les équations de Navier-Stokes sont [1] :

$$f_l^{eq}(\rho, \mathbf{u}) = w_l \rho [1 + \frac{\mathbf{c}_l \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{1}{2c_s^4} (\mathbf{c}_l \mathbf{u})^2 - \frac{1}{2c_s^2} (\mathbf{u} \mathbf{u})] \quad (6.16)$$

avec :

$$\mathbf{c}_l \mathbf{u} = u c_{xl} + v c_{yl} \quad (6.17)$$

$$(\mathbf{c}_l \mathbf{u})^2 = u^2 c_{xl}^2 + v^2 c_{yl}^2 + 2c_{xl} c_{yl} u v \quad (6.18)$$

$$\mathbf{u} \mathbf{u} = u^2 + v^2 \quad (6.19)$$

On développe l' expression de (6.16) :

$$f_l^{eq}(\rho, \mathbf{u}) = w_l \rho [1 + \frac{1}{c_s^2} (u c_{xl} + v c_{yl}) + \frac{1}{2c_s^4} (u^2 c_{xl}^2 + v^2 c_{yl}^2 + 2c_{xl} c_{yl} u v) - \frac{1}{2c_s^2} (u^2 + v^2)] \quad (6.20)$$

que l' on simplifiera au niveau des notations en l'écrivant sous la forme :

$$f_l^{eq}(\rho, \mathbf{u}) = a_l \rho + b_l \rho u + c_l \rho v + d_l \rho u^2 + e_l \rho v^2 + k_l \rho u v \quad (6.21)$$

avec :

$$a_l = w_l, b_l = w_l \frac{c_{xl}}{c_s^2}, c_l = w_l \frac{c_{yl}}{c_s^2} \quad (6.22)$$

$$d_l = w_l (\frac{c_{xl}^2}{2c_s^4} - \frac{1}{2c_s^2}), e_l = w_l (\frac{c_{yl}^2}{2c_s^4} - \frac{1}{2c_s^2}), k_l = w_l (\frac{c_{xl} c_{yl}}{c_s^4}) \quad (6.23)$$

On écrit la décomposition de ρ et u en part stationnaire et part fluctuante :

$$\rho = \bar{\rho} + \rho', \rho u = \bar{\rho} \bar{u} + (\rho u)', \rho v = \bar{\rho} \bar{v} + (\rho v)' \quad (6.24)$$

$$\rho u^2 = \frac{(\bar{\rho} \bar{u} + (\rho u)')^2}{(\bar{\rho} + \rho')}, \rho v^2 = \frac{(\bar{\rho} \bar{v} + (\rho v)')^2}{(\bar{\rho} + \rho')} \quad (6.25)$$

$$\rho u v = \frac{(\bar{\rho} \bar{u} + (\rho u)')(\bar{\rho} \bar{v} + (\rho v)')}{(\bar{\rho} + \rho')}, \quad (6.26)$$

$$\begin{aligned} f_l^{eq}(\rho, \mathbf{u}) - f_l^{\bar{eq}}(\bar{\rho}, \bar{\mathbf{u}}) &= a_l \rho' + b_l (\rho u)' + c_l (\rho v)' + d_l [\frac{(\bar{\rho} \bar{u} + (\rho u)')^2}{(\bar{\rho} + \rho')} - \bar{\rho} \bar{u}^2] \\ &+ e_l [\frac{(\bar{\rho} \bar{v} + (\rho v)')^2}{(\bar{\rho} + \rho')} - \bar{\rho} \bar{v}^2] + k_l [\frac{(\bar{\rho} \bar{u} + (\rho u)')(\bar{\rho} \bar{v} + (\rho v)')}{(\bar{\rho} + \rho')} - \bar{\rho} \bar{u} \bar{v}] \end{aligned} \quad (6.27)$$

On a les expressions suivantes de ρ' , $(\rho u)'$, $(\rho v)'$ en fonction des fonctions $f'_l(\mathbf{x}, t)$

$$\rho' = \sum_l f'_l(\mathbf{x}, t) \quad (6.28)$$

$$(\rho u)' = \sum_l c_{xl} f'_l(\mathbf{x}, t) \quad (6.29)$$

$$(\rho v)' = \sum_l c_{yl} f'_l(\mathbf{x}, t) \quad (6.30)$$

En simplifiant momentanément l'écriture de $f'_l(\mathbf{x}, t)$ en f'_l avec de plus [42].

$$\sum f'_l = \sum h_l \quad \sum_l c_{xl} f'_l = \sum_l c_{xl} h_l \quad \sum_l c_{yl} f'_l = \sum_l c_{yl} h_l \quad (6.31)$$

On aura :

$$\begin{aligned} f_l^{eq}(\rho, \mathbf{u}) - \bar{f}_l^{eq}(\bar{\rho}, \bar{\mathbf{u}}) &= a_l \left(\sum_l h_l \right) + b_l \left(\sum_l c_{xl} h_l \right) + c_l \left(\sum_l c_{yl} h_l \right) + d_l \left[\frac{(\bar{\rho} \bar{u} + (\sum_l c_{xl} h_l)^2)}{(\bar{\rho} + (\sum_l h_l))} - \bar{\rho} \bar{u}^2 \right] \\ &+ e_l \left[\frac{(\bar{\rho} \bar{v} + (\sum_l c_{yl} h_l)^2)}{(\bar{\rho} + (\sum_l h_l))} - \bar{\rho} \bar{v}^2 \right] + k_l \left[\frac{(\bar{\rho} \bar{u} + (\sum_l c_{xl} h_l)(\bar{\rho} \bar{v} + (\sum_l c_{yl} h_l)))}{(\bar{\rho} + (\sum_l h_l))} - \bar{\rho} \bar{u} \bar{v} \right] \end{aligned} \quad (6.32)$$

L'équation finale à analyser avec les ondes résonantes sera :

$$\begin{aligned} h_l(m+1, n+c_{xl}, p+c_{yl}) &= (1-\omega) h_l(m, n, p) \\ &+ \omega \left[a_l \left(\sum_j h_j \right) + b_l \left(\sum_j c_{xj} h_j \right) + c_l \left(\sum_j c_{yj} h_j \right) + d_l \left[\frac{(\bar{\rho} \bar{u} + (\sum_j c_{xj} h_j)^2)}{(\bar{\rho} + (\sum_j h_j))} - \bar{\rho} \bar{u}^2 \right] \right. \\ &\quad \left. + e_l \left[\frac{(\bar{\rho} \bar{v} + (\sum_j c_{yj} h_j)^2)}{(\bar{\rho} + (\sum_j h_j))} - \bar{\rho} \bar{v}^2 \right] \right. \\ &\quad \left. + k_l \left[\frac{(\bar{\rho} \bar{u} + (\sum_j c_{xj} h_j)(\bar{\rho} \bar{v} + (\sum_j c_{yj} h_j)))}{(\bar{\rho} + (\sum_j h_j))} - \bar{\rho} \bar{u} \bar{v} \right] \right] \end{aligned} \quad (6.33)$$

Nous allons pour le schéma sur réseau D2Q9 (6.1) calculer l'ensemble des paramètres $a_l, b_l, c_l, d_l, e_l, k_l$

On rappelle les paramètres de ce schéma : $w_0 = 4/9, w_l = 1/9, l = [2, 4, 6, 8], w_l = 1/36, l = [1, 3, 5, 7]$, les coordonnées des vitesses c_l sont : $c_0 = (0, 0), c_1 = (-1, 1), c_2 = (-1, 0), c_3 = (-1, -1), c_4 = (0, -1), c_5 = (1, -1), c_6 = (1, 0), c_7 = (1, 1), c_8 = (0, 1)$. $c_s = 1/\sqrt{3}$ est la vitesse du son du réseau.

On trouvera dans le tableau les résultats obtenus :

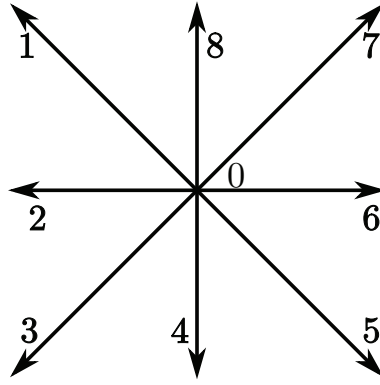


FIGURE 6.1 – Schéma D2Q9

l	w_l	c_{xl}	c_{yl}	a_l	b_l	c_l	d_l	e_l	k_l
0	4/9	0	0	4/9	0	0	-2/3	-2/3	0
1	1/36	-1	1	1/36	-1/12	1/12	1/12	1/12	-1/4
2	1/9	-1	0	1/9	-1/3	0	1/3	-1/6	1/4
3	1/36	-1	-1	1/36	-1/12	-1/12	1/12	1/12	1/4
4	1/9	0	-1	1/9	0	-1/3	-1/6	1/3	0
5	1/36	1	-1	1/36	1/12	-1/12	1/12	1/12	-1/4
6	1/9	1	0	1/9	1/3	0	1/3	-1/6	0
7	1/36	1	1	1/36	1/12	1/12	1/12	1/12	1/4
8	1/9	0	1	1/9	0	1/3	-1/6	1/3	0

TABLE 6.1 – Tableau des principaux paramètres

6.2 Etude de l'équation de Boltzmann linéarisée

Nous allons linéariser l'équation (6.33) par un développement de Taylor autour de la position d'équilibre.

Les termes non linéaires (nl) contenus dans la fonction d'équilibre (6.32) sont :

$$\begin{aligned}
 h_l(m+1, n+c_{xl}, p+c_{yl})^{nl} = & \\
 & d_l \left[\frac{(\bar{\rho}u + (\sum_j c_{xj}h_j)^2)}{(\bar{\rho} + (\sum_j h_j))} - \bar{\rho}u^2 \right] + e_l \left[\frac{(\bar{\rho}v + (\sum_l c_{yl}h_l)^2)}{(\bar{\rho} + (\sum_l h_l))} - \bar{\rho}v^2 \right] \\
 & + k_l \left[\frac{(\bar{\rho}u + (\sum_l c_{xl}h_l)(\bar{\rho}v + (\sum_l c_{yl}h_l)))}{(\bar{\rho} + (\sum_l h_l))} - \bar{\rho}uv \right] \quad (6.34)
 \end{aligned}$$

On écrit la linéarisation :

$$\begin{aligned}
h_l(m+1, n+c_{xl}, p+c_{yl})^{nl \rightarrow lin} &= d_l \frac{\partial}{\partial f'_j} \left\{ \frac{(\bar{\rho} \bar{u} + \sum_j c_{xj} f'_j)^2}{(\bar{\rho} + \sum_j f'_j)} - \bar{\rho} \bar{u}^2 \right\}_{f'_j=f_j^{eq}} \\
&+ e_l \frac{\partial}{\partial f'_j} \left\{ \frac{(\bar{\rho} \bar{v} + \sum_j c_{yj} f'_j)^2}{(\bar{\rho} + \sum_j f'_j)} - \bar{\rho} \bar{v}^2 \right\}_{f'_j=f_j^{eq}} + k_l \frac{\partial}{\partial f'_j} \left\{ \frac{(\bar{\rho} \bar{u} + (\sum_l c_{xl} h_l)(\bar{\rho} \bar{v} + (\sum_l c_{yl} h_l)))}{(\bar{\rho} + \sum_j f'_j)} - \bar{\rho} \bar{u} \bar{v} \right\}_{f'_j=f_j^{eq}}
\end{aligned} \quad (6.35)$$

On obtient pour l'équation linéarisée :

$$\begin{aligned}
h_l(m+1, n+c_{xl}, p+c_{yl})^{lin} &= \\
&(1-\omega)h_l(m, n, p) + \omega[a_l \sum_j h_j + b_l \sum_j c_{xj} h_j + c_l \sum_j c_{yj} h_j \\
&+ d_l(2\bar{u} \sum_j c_{xj} h_j - \bar{u}^2) + e_l(2\bar{v} \sum_j c_{yj} h_j - \bar{v}^2) + k_l(\bar{v} \sum_j c_{xj} h_j + \bar{u} \sum_j c_{yj} h_j - \bar{u} \bar{v})] \quad (6.36)
\end{aligned}$$

6.3 Ondes résonantes sur 2 modes

6.3.1 Développement des équations de collision

Nous examinerons cette configuration moins sensible que celle, résonante à 1 mode et poserons :

$$\begin{aligned}
h_l(m, n, p) &= [A_l^x(m)e^{in\pi/2} + A_l^{x*}(m)e^{-in\pi/2} + B_l^x(m)e^{in\pi}] \\
&\times [A_l^y(m)e^{ip\pi/2} + A_l^{y*}(m)e^{-ip\pi/2} + B_l^y(m)e^{ip\pi}] \quad (6.37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_l(m, n, p) &= [A_l^x(m)e^{in\pi/2} + A_l^{x*}(m)e^{-in\pi/2} + B_l^x(m)e^{in\pi}] \\
&\times [A_l^y(m)e^{ip\pi/2} + A_l^{y*}(m)e^{-ip\pi/2} + B_l^y(m)e^{ip\pi}] \quad (6.38)
\end{aligned}$$

En examinant les différents produits des 2 expressions mono-dimensionnelles entre crochets, on obtiendrait pour $h_l(m, n, p)$ la quantité bi-dimensionnelle de la forme suivante :

$$\begin{aligned}
h_l(m, n, p) &= \\
&A_l(m)e^{i(n+p)\pi/2} + B_l(m)e^{i(n-p)\pi/2} + C_l(m)e^{i(n+2p)\pi/2} + D_l(m)e^{i(2n+p)\pi/2} + E_l(m)e^{i(n+p)\pi} \\
&+ A_l^*(m)e^{-i(n+p)\pi/2} + B_l^*(m)e^{-i(n-p)\pi/2} + C_l^*(m)e^{-i(n+2p)\pi/2} + D_l^*(m)e^{-i(2n+p)\pi/2} \quad (6.39)
\end{aligned}$$

On se rend compte que cette expression n'est pas symétrique en n et p , du fait du facteur $B_l(m)e^{i(n-p)\pi/2} + B_l^*(m)e^{-i(n-p)\pi/2}$.

En effet en posant $B_l = B_l^x + iB_l^y$, on obtient : $2(B_l^x \cos(n-p) - B_l^y \sin(n-p))$ non symétrique en n et p avec le changement de signe du $\sin(n-p)$ entre $(n-p)$ et $(p-n)$.

On a alors cherché une forme symétrique.

On remarque que :

$$e^{i(n-p)\pi/2} = e^{i(n+p-2p)\pi/2} = (-1)^p e^{i(n+p)\pi/2} \quad (6.40)$$

$$= e^{i(2n-n-p)\pi/2} = (-1)^n e^{-i(n+p)\pi/2} \quad (6.41)$$

$$e^{i(p-n)\pi/2} = e^{i(n+p-2n)\pi/2} = (-1)^n e^{i(n+p)\pi/2} \quad (6.42)$$

$$= e^{i(2p-p-n)\pi/2} = (-1)^p e^{-i(n+p)\pi/2} \quad (6.43)$$

On retient la forme parfaitement symétrique suivante, qui de plus diminue le degré des équations linéaires à résoudre, en supprimant les inconnues B_l :

$$e^{i(n-p)\pi/2} = \frac{1}{2}((-1)^p e^{i(n+p)\pi/2} + (-1)^n e^{-i(n+p)\pi/2}) \quad (6.44)$$

$$e^{i(p-n)\pi/2} = \frac{1}{2}((-1)^n e^{i(n+p)\pi/2} + (-1)^p e^{-i(n+p)\pi/2}) \quad (6.45)$$

On a donc seulement pour $h_l(m, n, p)$ et respectivement $h_l(m+1, n+c_{xl}, p+c_{yl})$ les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} h_l(m, n, p) = & A_l(m)e^{i(n+p)\pi/2} + C_l(m)e^{i(n+2p)\pi/2} + D_l(m)e^{i(2n+p)\pi/2} \\ & + A_l^*(m)e^{-i(n+p)\pi/2} + C_l^*(m)e^{-i(n+2p)\pi/2} + D_l^*(m)e^{-i(2n+p)\pi/2} + E_l(m)e^{i(n+p)\pi} \end{aligned} \quad (6.46)$$

$$\begin{aligned} h_l(m+1, n+c_{xl}, p+c_{yl}) = & A_l(m+1)e^{i(n+c_{xl}+p+c_{yl})\pi/2} + C_l(m+1)e^{i(n+c_{xl}+2p+2c_{yl})\pi/2} + D_l(m+1)e^{i(2n+2c_{xl}+p+c_{yl})\pi/2} \\ & + A_l^*(m+1)e^{-i(n+c_{xl}+p+c_{yl})\pi/2} + C_l^*(m+1)e^{-i(n+c_{xl}+2p+2c_{yl})\pi/2} \\ & + D_l^*(m+1)e^{-i(2n+2c_{xl}+p+c_{yl})\pi/2} \\ & + E_l(m+1)e^{i(n+c_{xl}+p+c_{yl})\pi} \end{aligned} \quad (6.47)$$

On simplifie l'écriture pour ne pas trop allonger l'équation. On écrira *c.c.* pour l'ensemble des expressions conjuguées, et A_l pour $A_l(m)$, on conservera $A_l(m+1)$ qui sont les inconnues du système.

Soit les équations :

$$h_l(m, n, p) = A_l e^{i(n+p)\pi/2} + C_l e^{i(n+2p)\pi/2} + D_l e^{i(2n+p)\pi/2} + c.c. + E_l e^{i(n+p)\pi} \quad (6.48)$$

$$\begin{aligned}
h_l(m+1, n+c_{xl}, p+c_{yl}) = \\
A_l(m+1)e^{i(n+c_{xl}+p+c_{yl})\pi/2} + C_l(m+1)e^{i(n+c_{xl}+2p+2c_{yl})\pi/2} + D_l(m+1)e^{i(2n+2c_{xl}+p+c_{yl})\pi/2} + c.c. \\
+ E_l(m+1)e^{i(n+c_{xl}+p+c_{yl})\pi} \quad (6.49)
\end{aligned}$$

On remplace les termes $h_l(m, n, p)$ de (6.48) et $h_l(m+1, n+c_{xl}, p+c_{yl})$ de (6.49) dans l'équation (6.33), avec les simplifications d'écriture précédentes :

$$\begin{aligned}
& A_l(m+1)e^{i(n+c_{xl}+p+c_{yl})\pi/2} + C_l(m+1)e^{i(n+c_{xl}+2p+2c_{yl})\pi/2} \\
& \quad + D_l(m+1)e^{i(2n+2c_{xl}+p+c_{yl})\pi/2} + c.c. + E_l(m+1)e^{i(n+c_{xl}+p+c_{yl})\pi} \\
& = (1-\omega)(A_le^{i(n+p)\pi/2} + C_le^{i(n+2p)\pi/2} + D_le^{i(2n+p)\pi/2} + c.c. + E_le^{i(n+p)\pi}) \\
& \quad + \omega[a_l(\sum_j (A_j e^{i(n+p)\pi/2} + C_j e^{i(n+2p)\pi/2} + D_j e^{i(2n+p)\pi/2} + c.c. + E_j e^{i(n+p)\pi}) \\
& \quad + b_l(\sum_j c_{xj}(A_j e^{i(n+p)\pi/2} + C_j e^{i(n+2p)\pi/2} + D_j e^{i(2n+p)\pi/2} + c.c. + E_j e^{i(n+p)\pi})) \\
& \quad + c_l(\sum_j c_{yj}(A_j e^{i(n+p)\pi/2} + C_j e^{i(n+2p)\pi/2} + D_j e^{i(2n+p)\pi/2} + c.c. + E_j e^{i(n+p)\pi})) \\
& \quad + d_l \frac{(\bar{\rho}u + \sum_j c_{xj}(A_j e^{i(n+p)\pi/2} + C_j e^{i(n+2p)\pi/2} + D_j e^{i(2n+p)\pi/2} + c.c. + E_j e^{i(n+p)\pi}))^2}{(\bar{\rho} + \sum_j (A_j e^{i(n+p)\pi/2} + C_j e^{i(n+2p)\pi/2} + D_j e^{i(2n+p)\pi/2} + c.c. + E_j e^{i(n+p)\pi}))} \\
& \quad + e_l \frac{(\bar{\rho}v + \sum_j c_{yj}(A_j e^{i(n+p)\pi/2} + C_j e^{i(n+2p)\pi/2} + D_j e^{i(2n+p)\pi/2} + c.c. + E_j e^{i(n+p)\pi}))^2}{(\bar{\rho} + \sum_j (A_j e^{i(n+p)\pi/2} + C_j e^{i(n+2p)\pi/2} + D_j e^{i(2n+p)\pi/2} + c.c. + E_j e^{i(n+p)\pi}))} \\
& \quad + k_l[(\frac{(\bar{\rho}u + \sum_j c_{xj}(A_j e^{i(n+p)\pi/2} + C_j e^{i(n+2p)\pi/2} + D_j e^{i(2n+p)\pi/2} + c.c. + E_j e^{i(n+p)\pi}))}{(\bar{\rho} + \sum_j (A_j e^{i(n+p)\pi/2} + C_j e^{i(n+2p)\pi/2} + D_j e^{i(2n+p)\pi/2} + c.c. + E_j e^{i(n+p)\pi}))} \\
& \quad \times (\bar{\rho}v + \sum_j c_{yj}(A_j e^{i(n+p)\pi/2} + C_j e^{i(n+2p)\pi/2} + D_j e^{i(2n+p)\pi/2} + c.c. + E_j e^{i(n+p)\pi}))] \\
& \quad - \omega(d_l \bar{\rho}u^2 + e_l \bar{\rho}v^2 + k_l \bar{\rho}u\bar{v}) \quad (6.50)
\end{aligned}$$

On ramène l'équation (6.50) au même dénominateur :

$$(\bar{\rho} + \sum_j (A_j e^{i(n+p)\pi/2} + C_j e^{i(n+2p)\pi/2} + D_j e^{i(2n+p)\pi/2} + c.c. + E_j e^{i(n+p)\pi})) \quad (6.51)$$

On aura dans cette équation, seulement des expressions de produit, de la forme ci dessous :

$$\begin{aligned}
& (A_1 e^{i(n+p)\pi/2} + C_1 e^{i(n+2p)\pi/2} + D_1 e^{i(2n+p)\pi/2} + c.c. + E_1 e^{i(n+p)\pi}) \\
& \quad \times (A_2 e^{i(n+p)\pi/2} + C_2 e^{i(n+2p)\pi/2} + D_2 e^{i(2n+p)\pi/2} + c.c. + E_2 e^{i(n+p)\pi}) \quad (6.52)
\end{aligned}$$

Le tableau suivant montre les résonances entre modes obtenus.

La notation X_1, X_2 signifie simplement 2 quantités 1 et 2 différentes, facteurs du mode X correspondant, elle est sans relation avec le l ($l = 1, 9$) des X_l de l'équation (6.50)).

On utilisera les formules suivantes pour fermer les équations sur les modes $(n+p)\pi/2, -(n+p)\pi/2, (n+2p)\pi/2, -(n+2p)\pi/2, (2n+p)\pi/2, -(2n+p)\pi/2, (n+p)\pi$.

On rappelle que :

$$e^{n\pi} = e^{-n\pi} \quad (6.53)$$

$$e^{p\pi} = e^{-p\pi} \quad (6.54)$$

$$e^{i(n-p)\pi/2} = \frac{1}{2}((-1)^p e^{i(n+p)\pi/2} + (-1)^n e^{-i(n+p)\pi/2}) \quad (6.55)$$

$$e^{i(p-n)\pi/2} = \frac{1}{2}((-1)^n e^{i(n+p)\pi/2} + (-1)^p e^{-i(n+p)\pi/2}) \quad (6.56)$$

On transforme les expressions suivantes :

$$e^{n\pi/2} = (-1)^p e^{p\pi} e^{n\pi/2} = (-1)^p e^{(n+2p)\pi/2} \quad (6.57)$$

$$e^{n\pi} = (-1)^p e^{p\pi} e^{n\pi} = (-1)^p e^{(n+p)\pi} \quad (6.58)$$

$$e^{p\pi/2} = (-1)^n e^{n\pi} e^{p\pi/2} = (-1)^n e^{(p+2n)\pi/2} \quad (6.59)$$

$$e^{p\pi} = (-1)^n e^{n\pi} e^{p\pi} = (-1)^n e^{(n+p)\pi} \quad (6.60)$$

On opère la même transformation pour les quantités conjuguées. De plus on a :

$$1 = (-1)^n e^{n\pi} (-1)^p e^{p\pi} = (-1)^{(n+p)} e^{(n+p)\pi} \quad (6.61)$$

On a donc le système linéaire suivant entre le pas $m+1$ et le pas m :

$$H_{ij}X_j(m+1) = f(\omega, \bar{u}, \bar{v}, X_j(m), ..) \quad (6.62)$$

avec les inconnues $X_j(m+1) = A_l(m+1), A_l^*(m+1), C_l(m+1), C_l^*(m+1), D_l(m+1), D_l^*(m+1), E_l(m+1)$.

Pour poursuivre simplement cette étude en 2D, nous allons développer le processus permettant d'obtenir la première équation, facteur du premier mode $(n+p)\pi/2$, en portant en couleur grise les cellules où l'on retrouve ce mode, puis on identifiera les différentes quantités A_1 et A_2 intervenant dans les produits $A_1 \times A_2$, facteur de $e^{(n+p)\pi/2}$ (tableau 6.2).

Mais on ne développera pas l'équation plus complexe (au moins plus longue) du dernier mode $(n+p)\pi$ issue des cellules où on a porté la couleur verte.

On montre que la somme des termes grisés est égale, compte tenu des expressions de (6.57) et (6.61) où l'on retrouve des termes facteur de $e^{(n+p)\pi/2}$:

$$e^{(n+p)\pi/2} [(A_1^*)(E_2) + (C_1^*)(D_2^*) + (D_1^*)(C_2^*) + (E_1)(A_2^*)] \quad (6.63)$$

$$+ \frac{1}{2} [(-1)^n (C_1)(D_2^*) + (-1)^p (C_1^*)(D_2) + (-1)^p (D_1)(C_2^*) + (-1)^n (D_1^*)(C_2)] \quad (6.64)$$

L'équation (6.50) se compose de 7 termes, le premier terme comporte les inconnues $A_l(m+1), A_l^*(m+1), C_l^*(m+1), C_l(m+1), D_l(m+1), D_l^*(m+1), E_l(m+1)$ au pas $m+1$, la somme des 6 autres termes constitue le second membre du système linéaire au pas m :

		A_1	A_1^*	C_1	C_1^*	D_1	D_1^*	E_1
		$e^{(n+p)\pi/2}$	$e^{-(n+p)\pi/2}$	$e^{(n+2p)\pi/2}$	$e^{-(n+2p)\pi/2}$	$e^{(2n+p)\pi/2}$	$e^{-(2n+p)\pi/2}$	$e^{(n+p)\pi}$
A_2	$e^{(n+p)\pi/2}$	$e^{(n+p)\pi}$	1	$e^{-(2n+p)\pi/2}$	$e^{-p\pi/2}$	$e^{-(n+2p)\pi/2}$	$e^{-n\pi/2}$	$e^{-(n+p)\pi/2}$
A_2^*	$e^{-(n+p)\pi/2}$	1	$e^{(n+p)\pi}$	$e^{p\pi/2}$	$e^{(2n+p)\pi/2}$	$e^{n\pi/2}$	$e^{(n+2p)\pi/2}$	$e^{(n+p)\pi/2}$
C_2	$e^{(n+2p)\pi/2}$	$e^{-(2n+p)\pi/2}$	$e^{p\pi/2}$	$e^{n\pi}$	1	$e^{-(n+p)\pi/2}$	$e^{(-n+p)\pi/2}$	$e^{-n\pi/2}$
C_2^*	$e^{-(n+2p)\pi/2}$	$e^{-p\pi/2}$	$e^{(2n+p)\pi/2}$	1	$e^{n\pi}$	$e^{(n-p)\pi/2}$	$e^{(n+p)\pi/2}$	$e^{n\pi/2}$
D_2	$e^{(2n+p)\pi/2}$	$e^{-(n+2p)\pi/2}$	$e^{n\pi/2}$	$e^{-(n+p)\pi/2}$	$e^{(n-p)\pi/2}$	$e^{p\pi}$	1	$e^{-p\pi/2}$
D_2^*	$e^{-(2n+p)\pi/2}$	$e^{-n\pi/2}$	$e^{(n+2p)\pi/2}$	$e^{(-n+p)\pi/2}$	$e^{(n+p)\pi/2}$	1	$e^{p\pi}$	$e^{p\pi/2}$
E_2	$e^{(n+p)\pi}$	$e^{-(n+p)\pi/2}$	$e^{(n+p)\pi/2}$	$e^{-n\pi/2}$	$e^{n\pi/2}$	$e^{-p\pi/2}$	$e^{p\pi/2}$	1

TABLE 6.2 – Produit des facteurs $X_i \times X_j$

$$\begin{aligned}
\boxed{1} &= A_l(m+1)e^{i(n+c_{xl}+p+c_{yl})\pi/2} + C_l(m+1)e^{i(n+c_{xl}+2p+2c_{yl})\pi/2} \\
&\quad + D_l(m+1)e^{i(2n+2c_{xl}+p+c_{yl})\pi/2} + c.c. + E_l(m+1)e^{i(n+c_{xl}+p+c_{yl})\pi} \\
&\quad \times (\bar{\rho} + (\sum_j (A_j e^{i(n+p)\pi/2} + C_j e^{i(n+2p)\pi/2} + D_j e^{i(2n+p)\pi/2} + c.c. + E_j e^{i(n+p)\pi}))) = \\
&\quad \boxed{2} + (1-\omega)(A_l e^{i(n+p)\pi/2} + C_l e^{i(n+2p)\pi/2} + D_l e^{i(2n+p)\pi/2} + c.c. + E_l e^{i(n+p)\pi}) \\
&\quad \times (\bar{\rho} + (\sum_j (A_j e^{i(n+p)\pi/2} + C_j e^{i(n+2p)\pi/2} + D_j e^{i(2n+p)\pi/2} + c.c. + E_j e^{i(n+p)\pi}))) \\
&\quad \boxed{3} + \omega[a_l(\sum_j (A_j e^{i(n+p)\pi/2} + C_j e^{i(n+2p)\pi/2} + D_j e^{i(2n+p)\pi/2} + c.c. + E_j e^{i(n+p)\pi}) \\
&\quad + b_l(\sum_j c_{xj}(A_j e^{i(n+p)\pi/2} + C_j e^{i(n+2p)\pi/2} + D_j e^{i(2n+p)\pi/2} + c.c. + E_j e^{i(n+p)\pi})) \\
&\quad + c_l(\sum_j c_{yj}(A_j e^{i(n+p)\pi/2} + C_j e^{i(n+2p)\pi/2} + D_j e^{i(2n+p)\pi/2} + c.c. + E_j e^{i(n+p)\pi}))) \\
&\quad \times (\bar{\rho} + (\sum_j (A_j e^{i(n+p)\pi/2} + C_j e^{i(n+2p)\pi/2} + D_j e^{i(2n+p)\pi/2} + c.c. + E_j e^{i(n+p)\pi}))) \\
&\quad \boxed{4} + \omega[d_l(\bar{\rho}u + \sum_j c_{xj}(A_j e^{i(n+p)\pi/2} + C_j e^{i(n+2p)\pi/2} + D_j e^{i(2n+p)\pi/2} + c.c. + E_j e^{i(n+p)\pi})^2] \\
&\quad \boxed{5} + \omega[+e_l(\bar{\rho}v + \sum_j c_{yj}(A_j e^{i(n+p)\pi/2} + C_j e^{i(n+2p)\pi/2} + D_j e^{i(2n+p)\pi/2} + c.c. + E_j e^{i(n+p)\pi})^2] \\
&\quad \boxed{6} + \omega[+k_l[(\bar{\rho}u + \sum_j c_{xj}(A_j e^{i(n+p)\pi/2} + C_j e^{i(n+2p)\pi/2} + D_j e^{i(2n+p)\pi/2} + c.c. + E_j e^{i(n+p)\pi}) \\
&\quad \times (\bar{\rho}v + \sum_j c_{yj}(A_j e^{i(n+p)\pi/2} + C_j e^{i(n+2p)\pi/2} + D_j e^{i(2n+p)\pi/2} + c.c. + E_j e^{i(n+p)\pi})] \\
&\quad \boxed{7} - \omega(d_l \bar{\rho} u^2 + e_l \bar{\rho} v^2 + k_l \bar{\rho} u v) \\
&\quad \times (\bar{\rho} + (\sum_j (A_j e^{i(n+p)\pi/2} + C_j e^{i(n+2p)\pi/2} + D_j e^{i(2n+p)\pi/2} + c.c. + E_j e^{i(n+p)\pi}))) \quad (6.65)
\end{aligned}$$

Développons le terme facteur de $e^{(n+p)\pi/2}$ du $\boxed{1}$ de (6.65), en utilisant (6.63) dont les

termes $(A_1), (A_1^*), (C_1), (C_1^*), (D_1), (D_1^*), (E_1), (A_2), (A_2^*), (C_2), (C_2^*), (D_2), (D_2^*), (E_2)$ sont respectivement :

$$(A_1) = A_l(m+1)e^{i(c_{xl}+c_{yl})\pi/2}, (A_1^*) = A_l^*(m+1)e^{-i(c_{xl}+c_{yl})\pi/2} \quad (6.66)$$

$$(C_1) = C_l(m+1)e^{i(c_{xl}+2c_{yl})\pi/2}, (C_1^*) = C_l^*(m+1)e^{-i(c_{xl}+2c_{yl})\pi/2} \quad (6.67)$$

$$(D_1) = D_l(m+1)e^{i(2c_{xl}+c_{yl})\pi/2}, (D_1^*) = D_l^*(m+1)e^{-i(2c_{xl}+c_{yl})\pi/2} \quad (6.68)$$

$$(E_1) = E_l(m+1)e^{i(c_{xl}+c_{yl})\pi} \quad (6.69)$$

$$A_2 = \sum_j (A_j), (A_2^*) = \sum_j (A_j^*) \quad (6.70)$$

$$(C_2) = \sum_j (C_j), (C_2^*) = \sum_j (C_j^*) \quad (6.71)$$

$$(D_2) = \sum_j (D_j), (D_2^*) = \sum_j (D_j^*) \quad (6.72)$$

$$(E_2) = \sum_j (E_j) \quad (6.73)$$

$$(6.74)$$

Le premier terme $H_{1j}X_j(m+1)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} H_{1j}X_j(m+1) &= \bar{\rho}e^{i(c_{xl}+c_{yl})\pi/2}A_l(m+1) \\ &+ (A_l^*(m+1)e^{-i(c_{xl}+c_{yl})\pi/2})(\sum_j (E_j)) + (C_l^*(m+1)e^{-i(c_{xl}+2c_{yl})\pi/2})(\sum_j (D_j^*)) \\ &+ (D_l^*(m+1)e^{-i(2c_{xl}+c_{yl})\pi/2})(\sum_j (C_j^*)) + (E_l(m+1)e^{i(c_{xl}+c_{yl})\pi})(\sum_j (A_j^*)) \\ &+ \frac{1}{2}((-1)^n(C_l(m+1)e^{i(c_{xl}+2c_{yl})\pi/2})(\sum_j (D_j^*)) + (-1)^p(C_l^*(m+1)e^{-i(c_{xl}+2c_{yl})\pi/2})(\sum_j (D_j))) \\ &+ (-1)^p(D_l(m+1)e^{i(2c_{xl}+c_{yl})\pi/2})(\sum_j (C_j^*)) + (-1)^n(D_l^*(m+1)e^{-i(2c_{xl}+c_{yl})\pi/2})(\sum_j (C_j))) \quad (6.75) \end{aligned}$$

Regroupons les différentes inconnues $A_l, A_l^*, C_l, C_l^*, D_l, D_l^*, E_l$:

$$\begin{aligned} H_{1j}X_j(m+1) &= [A_l(m+1)][\bar{\rho}e^{i(c_{xl}+c_{yl})\pi/2}] + [A_l^*(m+1)][(e^{-i(c_{xl}+c_{yl})\pi/2})(\sum_j (E_j))] \\ &+ [C_l(m+1)][\frac{1}{2}((-1)^n e^{i(c_{xl}+2c_{yl})\pi/2})(\sum_j (D_j^*))] \\ &+ [C_l^*(m+1)][(e^{-i(c_{xl}+2c_{yl})\pi/2})(\sum_j (D_j^*)) + \frac{1}{2}(-1)^p(\sum_j (D_j))] \\ &+ [D_l(m+1)][\frac{1}{2}(-1)^p e^{i(2c_{xl}+c_{yl})\pi/2})(\sum_j (C_j^*))] \\ &+ [D_l^*(m+1)][(e^{-i(2c_{xl}+c_{yl})\pi/2})(\sum_j (C_j^*)) + \frac{1}{2}(-1)^n(\sum_j (C_j))] \\ &+ [E_l(m+1)][e^{i(c_{xl}+c_{yl})\pi})(\sum_j (A_j^*)) \quad (6.76) \end{aligned}$$

On reconnait la symétrie complète entre x , y .

Nous ne développerons pas le terme $x_1(m)$ qui est donc la somme de 6 produits de ce type soit quelques 20 lignes pour une seule équation. On remarquera cependant les particularités suivantes :

Dans [4] et [5] on a un carré de type :

$$[(\bar{\rho}u + \sum_j c_{xj}(A_j e^{i(n+p)\pi/2} + C_j e^{i(n+2p)\pi/2} + D_j e^{i(2n+p)\pi/2} + c.c. + E_j e^{i(n+p)\pi})^2] \quad (6.77)$$

Avec [4] les 3 termes suivants :

Le premier terme ρu^2 s'annule avec un terme du développement de [7].

Le second terme est un carré, donc on peut utiliser le calcul précédent avec des indices 1 et 2 identiques.

Le troisième terme est le produit :

$$2\rho u(\sum_j c_{xj}(A_j e^{i(n+p)\pi/2} + C_j e^{i(n+2p)\pi/2} + D_j e^{i(2n+p)\pi/2} + c.c. + E_j e^{i(n+p)\pi}) \quad (6.78)$$

Pour [5] on remplace $(\sum_j c_{xj}), \bar{\rho}u$ par $(\sum_j c_{yj}), \bar{\rho}v$.

Dans [6] on a un développement du même type, le deuxième terme carré étant remplacé par un produit en $(\sum_j c_{xj}) \times (\sum_j c_{yj})$.

Dans [7] on a un produit simple :

$$(d_l \bar{\rho} u^2 + e_l \bar{\rho} v^2 + k_l \bar{\rho} u v) \times (\bar{\rho} + \sum_j (A_j e^{i(n+p)\pi/2} + C_j e^{i(n+2p)\pi/2} + D_j e^{i(2n+p)\pi/2} + c.c. + E_j e^{i(n+p)\pi})) \quad (6.79)$$

6.3.2 Equations de transport

Comme dans les équations précédentes, non développées mais montrées à travers les cellules vertes et grises, on a des termes en $(-1)^n(\text{cellule } A_2 C_1^*)$, $(-1)^p(\text{cellule } A_2 D_1^*)$, $(-1)^{n+p}(\text{cellules } 1)$, donc des résultats différents suivant la parité de $n, p, n+p$ comme le montre le petit tableau limité à 4×4 cellules.

Si on note dans une même formulation la parité (I=impair et P=pair) pour $n, p, n+p$, on obtient 4 types de schémas *IIP, PII, IPI, PPP* et le transport de m en $m+1$ va modifier, suivant les directions des vitesses, le type.

La figure (6.3) montre le transport entre m et $m+1$ des différentes fonctions $h_l(n, p)$.

Il nous reste à examiner les conditions aux frontières et les conditions initiales :

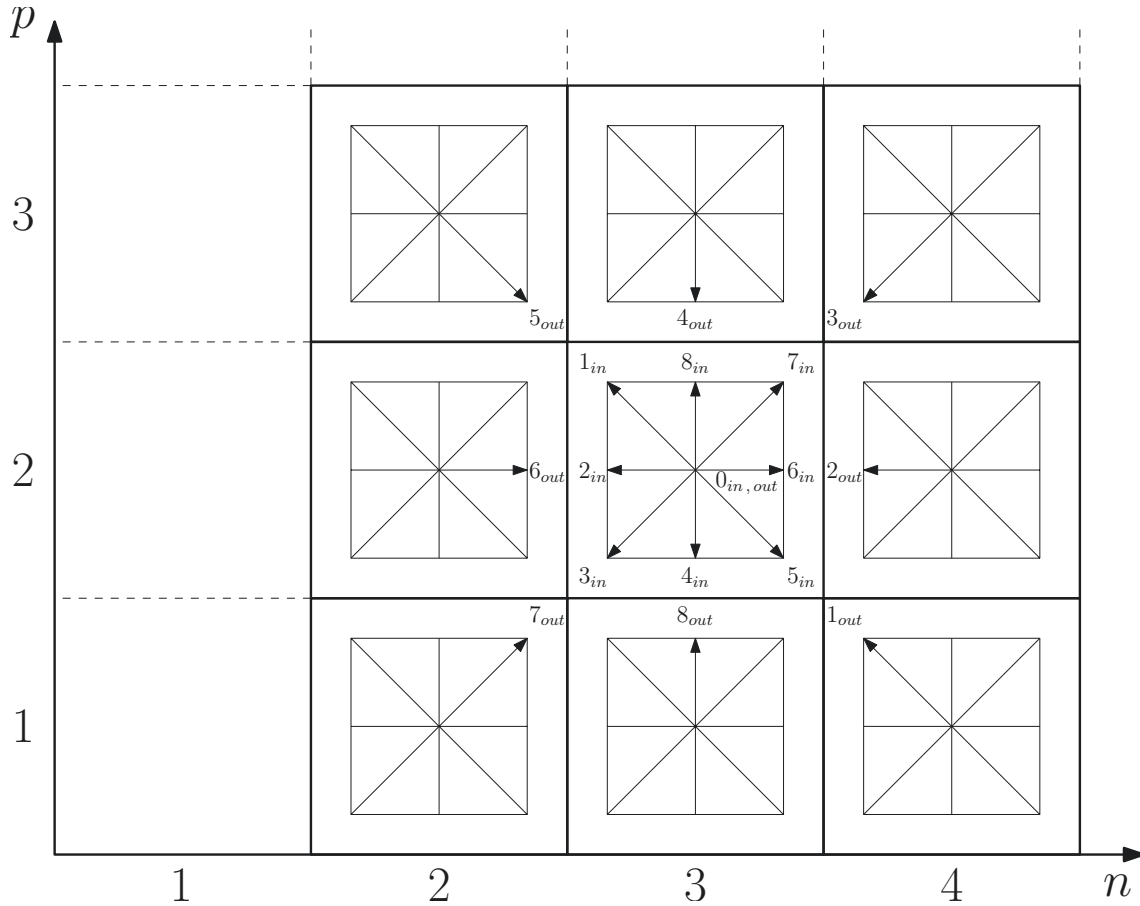
6.3.3 Conditions aux frontières

Nous reprendrons des conditions périodiques aux frontières x et y semblables au 1D.

6.3.4 Conditions initiales

Ce problème déjà complexe en 1D, se pose avec encore plus d'acuité en 2D. L'idéal (ce qui n'était pas possible en 1D) serait de se rapprocher de conditions initiales connues, mais la décomposition sur les modes $\pi/2$ et π ajoute une difficulté supplémentaire.

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
$p = 1$	<i>IIP</i>	<i>PII</i>	<i>IIP</i>	<i>PII</i>
$p = 2$	<i>IPi</i>	<i>PPP</i>	<i>IPi</i>	<i>PPP</i>
$p = 3$	<i>IIP</i>	<i>PII</i>	<i>IIP</i>	<i>PII</i>
$p = 4$	<i>IPi</i>	<i>PPP</i>	<i>IPi</i>	<i>PPP</i>

FIGURE 6.2 – Parité de $n, p, n + p$ dans les différentes cellules, avec I=impair et P=pairFIGURE 6.3 – Transport entre m et $m + 1$ des différentes fonctions $h_l(n, p)$ **Initialisation sur $h_l(0, n)$**

On doit donc initialiser les amplitudes de $A_l(0), C_l(0), D_l, E_l(0)$.

$$h_l(0, n, p) = A_l(0)e^{i(n+p)\pi/2} + C_l(0)e^{i(n+2p)\pi/2} + D_l(0)e^{i(2n+p)\pi/2} + c.c. + E_l(0)e^{i(n+p)\pi} \quad (6.80)$$

On reprendra le modèle d'initialisation utilisé pour l'équation de Burgers :

$$X_l(0, n) = \sigma_l(1 + i) \quad (6.81)$$

Suivant les valeurs de σ_l pour $l = 1, 9$, on favorise différentes initialisations physiques. On choisira l'initialisation suivante $\sigma_l = \sigma, \forall l$ correspond à :

$$h_l(0, n, p) = \sigma(1+i)[e^{i(n+p)\pi/2} + e^{i(n+2p)\pi/2} + e^{i(2n+p)\pi/2} + c.c.] + \sigma e^{i(n+p)\pi} \quad (6.82)$$

$$\sum_l h_l(0, n, p) = 9\sigma[((1+i)(e^{i(n+p)\pi/2} + e^{i(n+2p)\pi/2} + e^{i(2n+p)\pi/2}) + c.c.) + e^{i(n+p)\pi}] \quad (6.83)$$

$$(\rho)' = \sum_l h_l(0, n) \neq 0 \quad (6.84)$$

$$(\rho u)' = \sum_l c_{xl} h_l(0, n, p) = 0 \quad (6.85)$$

$$(\rho v)' = \sum_l c_{yl} h_l(0, n, p) = 0 \quad (6.86)$$

$$u'(0, n, p) = \frac{-\bar{u} \sum_l h_l(0, n, p)}{\bar{\rho} + \sum_l h_l(0, n, p)} \quad (6.87)$$

$$v'(0, n, p) = \frac{-\bar{v} \sum_l h_l(0, n, p)}{\bar{\rho} + \sum_l h_l(0, n, p)} \quad (6.88)$$

$$|u'(0, n, p)|_{max} = \left| \frac{-9\sigma\bar{u}[(1+i)(e^{i(n+p)\pi/2} + e^{i(n+2p)\pi/2} + e^{i(2n+p)\pi/2}) + c.c.] + e^{i(n+p)\pi}}{(1-9\sigma[(1+i)(e^{i(n+p)\pi/2} + e^{i(n+2p)\pi/2} + e^{i(2n+p)\pi/2}) + c.c.] + e^{i(n+p)\pi})} \right| \quad (6.89)$$

pour $n = 1, 4$ et $p = 1, 4$:

$$|u'(0, n, p)|_{max} = \left| \frac{63\sigma\bar{u}}{-1 + 63\sigma} \right| \quad (6.90)$$

obtenu pour $n = 1, p = 4$ ou $n = 4, p = 1$.

La figure (6.4) montre la carte de stabilité avec la condition d'initialisation choisie et avec $\bar{u} \neq 0, \bar{v} = 0$.

On notera que cette configuration a été obtenue pour $(500\Delta t)$, donc bien inférieur aux $2000\Delta t$ en 1D. Cette carte étant stable depuis $200\Delta t$, nous n'avons pas été au delà

On a également vérifié que la condition symétrique en y soit $\bar{u} = 0, \bar{v} \neq 0$ donne exactement la même carte : figure (6.5) En modifiant légèrement la conditions initiale sur $h_3 = -h_l$, on obtient la figure (6.6) proche des précédentes.

Il est bien évident que de très nombreuses autres combinaisons différentes sur σ_l et σ_l' peuvent être obtenues, correspondant ou non à des situations physiques, en particulier en jouant sur les 2 directions.

On aurait pu imaginer de passer de l'initialisation de $h_l(0, n, p)$ à celle de $u'(0, n, p)$ et (ou) $v'(0, n, p)$ comme pour l'étude précédente monodimensionnelle. Le nombre d'inconnues s'élèverait à 63 avec des hypothèses plausibles à poser comme :

1. $\sigma_j = \sigma$ pour tout j .
2. les facteurs de $(-1)^n$ ne dépendent pas de n , les facteurs de $(-1)^p$ ne dépendent pas de p , les facteurs de $(-1)^{n+p}$ ne dépendent pas de $n+p$ c.a.d les initialisations des A_l, C_l, D_l, E_l ne dépendent pas de $n, p, n+p$, mais l'annulation de tous ces facteurs aboutit à des incompatibilités ou à mettre nul certains de ces facteurs.

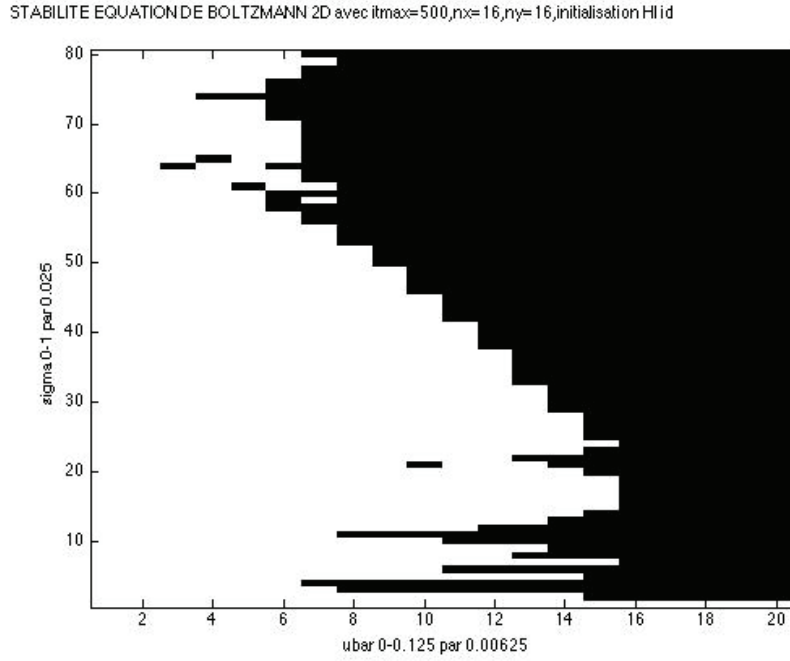


FIGURE 6.4 – Carte de stabilité avec les h_l initiaux tous égaux,
 $\bar{u} = [0, 0.125]$, $\bar{v} = 0$, $\sigma = [0, 1]$, $Jx = 16$, $Jy = 16$, $\omega = 1.85$, $t = 500\Delta t$

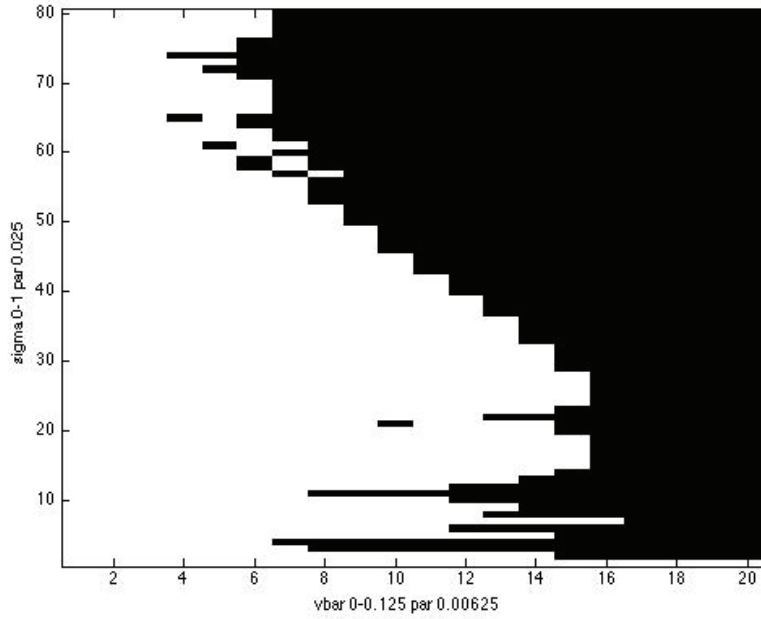


FIGURE 6.5 – Carte de stabilité avec les h_l initiaux tous égaux,
 $\bar{u} = 0$, $\bar{v} = [0, 0.125]$, $\sigma = [0, 1]$, $Jx = 16$, $Jy = 16$, $\omega = 1.85$, $t = 500\Delta t$

3. $E_j = \sigma$ pour tout j .

On a estimé que compte tenu :

- du choix un peu aléatoire des hypothèses supplémentaires.
- des instabilités importantes obtenues, pour des temps plus courts, de la première initialisation.
- de la difficulté de gérer les h_l avec composantes de vitesses en x et en y , même dans la situation $\bar{v} = 0$.

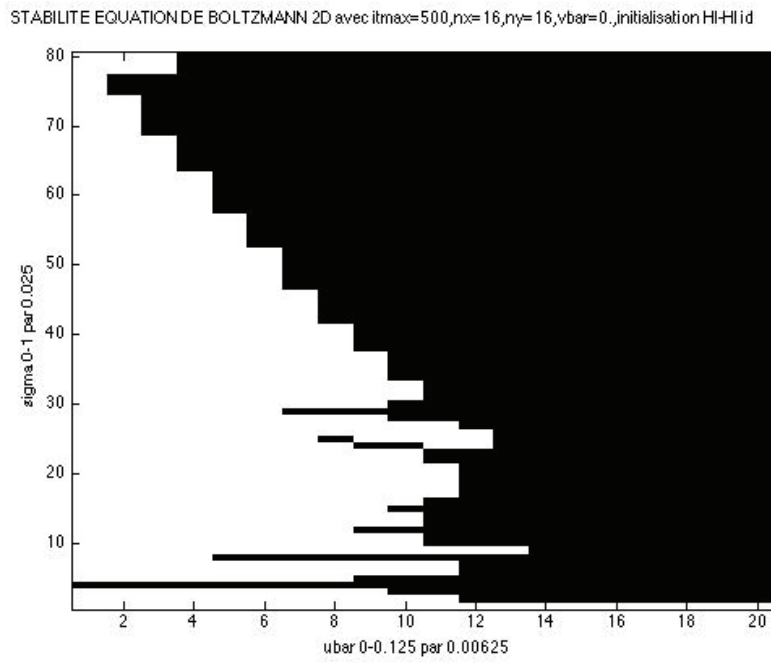


FIGURE 6.6 – Carte de stabilité avec les h_l initiaux tous égaux sauf $h_3 = -h_l$, $\bar{u} = 0$, $\bar{v} = [0, 0.125]$, $\sigma = [0, 1]$, $Jx = 16$, $Jy = 16$, $\omega = 1.85$, $t = 500\Delta t$

il était prudent, sans tomber sur du pur aléatoire, de ne pas poursuivre ce type d'initialisation.

Conclusion

Nous avons montré l'intérêt de la méthode de Boltzmann sur réseau pour les applications industrielles ferroviaires. L'objet principal de cette thèse était d'inventorier analytiquement la stabilité ou l'instabilité numérique des solutions obtenues par cette méthode. Pour ce faire simplement, nous avons voulu travailler en une dimension, d'une part pour recouvrir en partie les diverses études d'instabilité de l'équation de Burgers, et en particulier de pouvoir observer d'éventuelles focalisations dans des zones dites stables et d'autre part pour initier analytiquement une application de la méthode des ondes résonantes au système "vectoriel" obtenu dans la méthode de Boltzmann sur réseau.

Nous avons développé, en détail, la méthode de Boltzmann sur un réseau D1Q3, en isotherme. Nous avons retrouvé les équations de Navier Stokes isothermes correspondantes.

Nous avons décomposé les paramètres de cet écoulement en une part stationnaire monotone porteuse et une part fluctuante perturbée. Nous avons étudié, dans une première partie, la stabilité linéaire modale de cette fluctuation des équations de Boltzmann sur réseau, par la méthode de Von Neumann en ondes planes, de nombre d'onde k . Nous avons fourni une carte "3D" des modes en fonction du nombre d'onde k et de la vitesse de l'écoulement porteur \bar{u} . Nous avons obtenu les paramètres critiques au delà desquels les solutions sont amplifiées et deviennent instables, comme $\bar{u} = (1 - 1/\sqrt{3}) = 0.422$ dont nous retrouvons la présence sur les cartes d'instabilité non linéaire établies en ondes résonantes 1 mode $2\pi/3$ et 2 modes $\pi/2, \pi$.

Dans une seconde partie, nous avons appliqué la méthode des ondes résonantes pour obtenir des solutions exactes du système non linéaire des équations de Boltzmann. Elle a été effectuée avec 1 mode résonant et 2 modes résonants. Le principal problème rencontré a été la définition des conditions initiales. Nous avons montré plusieurs types d'initialisation utilisant :

- soit les fonctions de distribution $f'_l(x, t)$,
- soit la vitesse de la perturbation $u'(x, t)$,
- soit les fonctions d'équilibre $f_l^{eq}(x, t)$.

Les différentes cartes obtenues avec ces différents types d'initialisation sont de nature voisine à une exception près.

En effet, l'observation principale reste la différence de forme de la carte de stabilité, en particulier à 2 modes résonants, correspondant à l'initialisation plus naturelle par la vitesse perturbée de l'écoulement $u'(x, t)$.

Nous avons ensuite, avec l'adjonction de modes de sideband, d'amplitude initiale extrêmement faible, tenté de déclencher des focalisations (même s'il semble fort que, dans l'équation de Burgers, le schéma de discrétisation leapfrog en soit la cause, plutôt que les modes de sideband). Nous avons développé les systèmes linéaires avec l'adjonction de ces modes pour analyser une éventuelle focalisation. Celle ci n'a été obtenue dans aucune situation.

Avec 1 mode résonant, les modes de sideband ont développé, quelque soit l'initialisation, une instabilité inconditionnelle.

Alors que, avec 2 modes résonants, la carte d'instabilité calculée avec l'initialisation sur la vitesse de la perturbation n'a presque pas été affectée.

Nous nous sommes penchés dans une troisième partie sur la non normalité des opérateurs différentiels linéarisés. Nous avons rappelé sur un exemple modèle l'effet de cette non normalité sur l'existence de croissances transitoires pour certaines conditions initiales.

Nous avons donc établi le caractère non normal des systèmes linéarisés issus des équations de Boltzmann sur réseau. Nous avons montré un paysage de croissances transitoires dont l'amplitude de l'amplification fonction de \bar{u} et de t peut atteindre 15 pour des temps courts.

Nous avons développé une méthode pour optimiser les amplifications, en non linéaire, à partir des équations de Boltzmann sur réseau en ondes résonantes à 2 modes. Cette méthode d'optimisation d'une fonction, basée sur la différentiation d'une fonctionnelle de Lagrange, permet de définir les équations de Boltzmann adjointes. A partir des travaux de Vergnaut [42] et Tékitek[43], nous avons calculé les paramètres définissant les équations adjointes en 1D. La fonction à optimiser correspondait à l'amplification de l'énergie des fonctions de distribution. Des cartes " 3D " de cette amplification fonction du nombre de pas d'optimisation et du champ de vitesse porteur ont été obtenues. Elle montre les amplifications au temps T et les amplifications maximales obtenues sur l'espace de temps $[0, T]$, moins importantes qu'en linéaire.

En dernière partie, compte tenu de la réussite de la méthode des ondes résonantes en 1D, nous l'avons appliquée à un réseau à 2 dimensions : le réseau bien connu D2Q9. Les systèmes d'équations (de quelque demi-page chacune) ont été calculés analytiquement. Des cartes d'instabilité ont été obtenues, malgré l'accroissement potentiel, avec les 2 directions, du nombre et de la longueur des équations ainsi que du nombre de conditions initiales. Celles ci ont néanmoins validées par des calculs symétriques en \bar{u} et \bar{v} produisant des cartes d'instabilité identiques.

Nous avons pu à travers ce travail entrer dans plusieurs nouveaux mondes : le monde merveilleux de Boltzmann, celui plus terre à terre des instabilités numériques ; le monde mystérieux de l'entropie et celui du désordre. Nous avons franchi le monde filaire, dépassé celui des cartes en noir et blanc, pour évoluer dans le monde 3D coloré de monts et de collines. Nous avons fréquenté le monde non-normal où des paysages de croissances transitoires se sont présentés à nous.

Puis nous sommes entrés dans le monde des équations de Boltzmann en 2D, celui du 3D nous paraissant hors de portée vis à vis de la longueur des équations et de la probabilité non nulle d'erreurs.

Par rapport à ce que nous avons présenté en introduction sur la simulation d'écoulements autour d' un TGV, le lecteur se posera la question suivante. Quelle est la liaison entre ces beaux calculs et les travaux présentés ici. A quoi peuvent servir ces études qui en paraissent fort éloignées ?

Nous répondrons simplement que nous pensons à notre modeste place avoir montré :

- que la méthode de Boltzmann sur réseau est devenue un outil puissant, déjà adulte.
- que la discrétisation de l' espace et du temps n'est pas innocente en terme de stabilité numérique.
- que la méthode des ondes résonantes, permettant d'obtenir des solutions exactes non linéaires, et utilisée pour les hautes énergies peut s'appliquer à la méthode de Boltzmann sur réseau.
- que les opérateurs de phénomènes hydrodynamiques présentés en introduction sont pour

la plupart non normaux.

- que, en conséquence de cette non normalité, des croissances transitoires en temps courts peuvent se produire.
- que des méthodes d'optimisation utilisant les modes adjoints peuvent être développées.

C'est déjà beaucoup, au moins pour le rédacteur de ces travaux !

Perspectives

Si on estime que ces travaux puissent être utiles, on peut entrevoir plusieurs perspectives de développement :

- Examiner l'usage des modes résonants pour mieux définir les conditions de stabilité,
- Tenter en 2D de définir des conditions initiales plus représentatives de phénomènes physiques, comme celles d'un champ porteur moyen cisailé, une couche limite par exemple,
- Développer la méthode de contrôle présentée (ou le principe de méthode) qui utilise les équations adjointes, pour augmenter ou réduire les amplifications.

Différences finies avec schéma leapfrog

Considérons l'équation non linéaire, non visqueuse de Burgers :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.1})$$

dont la solution générale exacte est :

$$u = f(x - ut) \quad (\text{A.2})$$

$$f \text{ étant une fonction arbitraire.} \quad (\text{A.3})$$

Décomposons comme précédemment u en $u' + \bar{u}$ avec \bar{u} écoulement uniforme constant.

L'équation (A.1) devient :

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + (u' + \bar{u}) \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.4})$$

Discretisons les dérivées par rapport au temps et à l'espace par le schéma leapfrog. On peut rappeler que ce schéma dérive des 2 développements de Taylor suivants :

$$u(x + \Delta x, t) = u(x) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dots \quad (\text{A.5})$$

$$u(x - \Delta x, t) = u(x) - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dots \quad (\text{A.6})$$

Soit, en soustrayant ces 2 équations :

$$u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t) = 2\Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + O(\Delta x)^2 \quad (\text{A.7})$$

La dérivée par rapport à t est obtenue de la même façon :

$$u(x, t + \Delta t) - u(x, t - \Delta t) = 2\Delta t \frac{\partial u}{\partial t} + O(\Delta t)^2 \quad (\text{A.8})$$

Nous étudierons le comportement linéaire de l'équation (A.1). On supprimera pour simplifier les (') :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.9})$$

Nous allons analyser la stabilité du schéma leapfrog [44] par rapport à l'équation d'oscillation suivante :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = i\omega V \quad (\text{A.10})$$

On ramène l'équation (A.9) à cette équation d'oscillation en posant :

$$u = \hat{u}e^{ikx} \quad (\text{A.11})$$

L'équation (A.9) devient :

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + ikU\hat{u} = 0 \quad (\text{A.12})$$

En posant $\omega = -k\bar{u}$, on retrouve l'équation d'oscillation dont nous allons examiner le comportement par rapport au schéma leapfrog. (Nous garderons la variable V pour cette analyse).

La solution générale de (A.10) est :

$$V(t) = V(0)e^{i\omega t} \quad (\text{A.13})$$

Pour les valeurs discrétisées du temps $t = n\Delta t$:

$$V(n\Delta t) = V^n = V(0)e^{in\omega\delta t} \quad (\text{A.14})$$

On a donc successivement :

$$V^{n+1} = \lambda V^n V^{n+1} = \lambda^2 V^{n-1} \quad (\text{A.15})$$

On retrouve alors le schéma en posant :

$$V^{n+1} - V^{n-1} = 2i\omega\Delta t V^n = 2ipV^n \text{ et } p = \omega\Delta t, \quad (\text{A.16})$$

En mettant en facteur V^{n-1} , on peut résoudre l'équation suivante :

$$\lambda^2 - 2ip\lambda - 1 = 0 \quad (\text{A.17})$$

dont les 2 racines sont :

$$(\text{A.18})$$

$$\lambda_1 = \sqrt{1 - p^2} + ip \quad (\text{A.19})$$

$$\lambda_2 = \sqrt{1 - p^2} - ip \quad (\text{A.20})$$

Si une solution de la forme $V^{n+1} = \lambda V^n$ doit représenter une approximation de la solution vraie, alors nous devons avoir $\lambda \rightarrow 1$ quand $\Delta t \rightarrow 0$.

Pour les 2 solutions quand $p = \omega \Delta t \rightarrow 0$, la première solution est bien physique $\lambda_1 \rightarrow 1$, alors que la seconde solution est une solution numérique parasite sans sens physique, car $\lambda_2 \rightarrow -1$.

Puisqu'on a une solution linéaire, la solution sera en fait une combinaison linéaire des 2 solutions :

$$V^n = a\lambda_1^n V_1^0 + b\lambda_2^n V_2^0 \quad (\text{A.21})$$

On trouve les valeurs de a et b avec les conditions initiales décomposées sur ces 2 modes :

$$V^0 = aV_1^0 + bV_2^0 \quad (\text{A.22})$$

$$V^1 = a\lambda_1 V_1^0 + b\lambda_2 V_2^0 \quad (\text{A.23})$$

On trouve en définitive :

$$V^n = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_1^n (V^1 - \lambda_2 V^0) - \lambda_2^n (V^1 - \lambda_1 V^0)) \quad (\text{A.24})$$

Les amplitudes des modes physiques et de calcul sont donc proportionnelles respectivement à :

$$| V^1 - \lambda_2 V^0 |, | V^1 - \lambda_1 V^0 | \quad (\text{A.25})$$

On voit ainsi l'importance du choix des conditions initiales, car on comprend bien l'influence néfaste du mode parasite, en particulier son rôle dans le processus de focalisation. (chapitre 2)

Méthode des échelles multiples

On va résoudre le système suivant par la méthode des échelles multiples :

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 + i\omega A_1 + i\omega(\alpha_0 b^* e^{-i\omega t} - 2\alpha_0^* A_2^* e^{i\omega t}) &= 0 \\ \dot{A}_2 + i\omega A_2 + i\omega(\alpha_0 b e^{-i\omega t} - 2\alpha_0^* A_1^* e^{i\omega t}) &= 0 \\ \dot{b} + 2i\Omega b - i\Omega(\alpha_0^* A_2 e^{i\omega t} + \alpha_0 A_1^* e^{-i\omega t}) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Puisque $\omega \gg 1$, on peut introduire un temps rapide $T = \omega t$ et un temps lent $\tau = \Omega t$.
On pose :

$$\epsilon = \frac{\Omega}{\omega} \quad (\text{B.2})$$

$$(\text{B.3})$$

Le temps lent devient : $\tau = \omega \epsilon t$.

On peut avec cette décomposition temporelle écrire la dérivée par rapport au temps sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \omega \frac{\partial}{\partial T} + \Omega \frac{\partial}{\partial \tau} \\ &= \omega \left(\frac{\partial}{\partial T} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

On décompose les amplitudes suivant les 2 temps : T et τ .

$$\begin{aligned} A_1 &= A_1^0(T, \tau) + \epsilon A_1^1(T, \tau) \\ A_2 &= A_2^0(T, \tau) + \epsilon A_2^1(T, \tau) \\ b &= b_0(T, \tau) + \epsilon b_1(T, \tau) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

En portant la décomposition précédente et celle de la dérivée (B.4) dans les équations (B.1), et en égalant les termes à l'ordre ϵ^0 , le système (B.1) devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} A_1^0(T, \tau) + i A_1^0(T, \tau) + i(\alpha_0 b_0^*(T, \tau) e^{-iT} - 2\alpha_0^* A_2^{0*}(T, \tau) e^{iT}) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial T} A_2^0(T, \tau) + i A_2^0(T, \tau) + i(\alpha_0 b_0(T, \tau) e^{-iT} - 2\alpha_0^* A_1^{0*}(T, \tau) e^{iT}) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial T} b_0(T, \tau) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

On va résoudre le système différentiel des 2 premières équations précédentes par rapport au temps T puisque la dernière équation se résoud facilement sous la forme $b_0(T, \tau) = b_0(\tau)$.

On prend la conjuguée de la première équation de (B.6) :

$$\frac{\partial}{\partial T} A_1^{0*}(T, \tau) - i A_1^{0*}(T, \tau) - i(\alpha_0^* b_0(\tau) e^{iT} - 2\alpha_0 A_2^0(T, \tau) e^{-iT}) = 0 \quad (\text{B.7})$$

que l'on multiplie par $i\alpha_0^* e^{iT}$:

$$2|\alpha_0|^2 A_2^0(T, \tau) = i\alpha_0^* \frac{\partial}{\partial T} A_1^{0*}(T, \tau) e^{iT} + \alpha_0^* A_1^{0*}(T, \tau) e^{iT} + \alpha_0^{*2} b_0(\tau) e^{2iT} \quad (\text{B.8})$$

puis que l'on différencie par rapport au temps T :

$$2|\alpha_0|^2 \frac{\partial}{\partial T} A_2^0(T, \tau) = i\alpha_0^* \frac{\partial^2}{\partial T^2} A_1^{0*}(T, \tau) e^{iT} + i\alpha_0^* A_1^{0*}(T, \tau) e^{iT} + 2i\alpha_0^{*2} b_0(\tau) e^{2iT} \quad (\text{B.9})$$

On multiplie la seconde équation de (B.6) par $2|\alpha_0|^2$:

$$2|\alpha_0|^2 \frac{\partial}{\partial T} A_2^0(T, \tau) + 2i|\alpha_0|^2 A_2^0(T, \tau) + 2i|\alpha_0|^2 \alpha_0 b_0(T, \tau) e^{-iT} - 4i|\alpha_0|^2 \alpha_0^* A_1^{0*}(T, \tau) e^{iT} = 0 \quad (\text{B.10})$$

On remplace dans cette équation (B.10) les 2 premiers termes en $A_2^0(T, \tau)$ par leurs valeurs en termes de $A_1^0(T, \tau)$ à l'aide des équations (B.8) et (B.9), puis on conjugue l'équation résultante.

Il vient alors l'équation différentielle du second ordre avec second membre suivante :

$$\frac{\partial^2}{\partial T^2} A_1^{0*}(T, \tau) - i \frac{\partial}{\partial T} A_1^{0*}(T, \tau) + A_1^{0*}(T, \tau) (2 - 4|\alpha_0|^2) = -(3\alpha_0 e^{-iT} + 2\alpha_0^{*2} e^{2iT}) b_0^*(\tau) \quad (\text{B.11})$$

On résoud d'abord cette équation sans second membre, en posant : $A_1^0(T, \tau) = a_1 e^{i\lambda T}$ que l'on porte dans l'équation (B.11), dont les solutions sont celles de l'équation du second degré :

$$-\lambda^2 + \lambda + (2 - 4|\alpha_0|^2) = 0 \quad (\text{B.12})$$

Soit les racines :

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} [1 \pm (9 - 16|\alpha_0|^2)^{1/2}] \quad (\text{B.13})$$

La solution sans second membre s'écrit donc :

$$A_1^0(T, \tau) = C_1(\tau) e^{i\lambda_1 T} + C_2(\tau) e^{i\lambda_2 T} \quad (\text{B.14})$$

On cherche ensuite des solutions particulières de l'équation avec second membre sous la forme : $A_1^0(T, \tau) = B_1 e^{-i\lambda T}$ et $A_1^0(T, \tau) = B_2 e^{2i\lambda T}$.

En remplaçant dans l'équation (B.11) et en égalant les termes respectivement en $e^{-i\lambda T}$ et $e^{2i\lambda T}$ on obtient :

$$B1 = \frac{3\alpha_0}{4|\alpha_0|^2} b_0^* \quad (\text{B.15})$$

$$B2 = \frac{\alpha_0^*}{2\alpha_0} b_0^* \quad (\text{B.16})$$

On obtient pour le premier ordre les équations suivantes, après avoir utilisé l'équation (B.8) pour obtenir $A_2^0(T, \tau)$:

$$A_1^0(T, \tau) = C_1(\tau)e^{i\lambda_1 T} + C_2(\tau)e^{i\lambda_2 T} + \frac{3\alpha_0 b_0^*}{4|\alpha_0|^2} e^{-iT} + \frac{\alpha_0^* b_0^*}{2\alpha_0} e^{2iT} \quad (\text{B.17})$$

$$A_2^0(T, \tau) = \frac{(1 + \lambda_1)}{2\alpha_0} C_1^*(\tau)e^{i\lambda_2 T} + \frac{(1 + \lambda_2)}{2\alpha_0} C_2^*(\tau)e^{i\lambda_1 T} + \frac{3\alpha_0 b_0}{4|\alpha_0|^2} e^{-iT} + \frac{\alpha_0^* b_0}{2\alpha_0} e^{2iT} \quad (\text{B.18})$$

$$b_0(T, \tau) = b_0(\tau) \quad (\text{B.19})$$

On examine le système (B.1) à l'ordre ϵ^1 :

$$\frac{\partial}{\partial T} A_1^1(T, \tau) + \frac{\partial}{\partial \tau} A_1^0(T, \tau) + iA_1^1(T, \tau) + i(\alpha_0 b_0^*(\tau)e^{-iT} - 2\alpha_0^* A_2^{1*}(T, \tau)e^{iT}) = 0 \quad (\text{B.20})$$

$$\frac{\partial}{\partial T} A_2^1(T, \tau) + \frac{\partial}{\partial \tau} A_2^0(T, \tau) + iA_2^1(T, \tau) + i(\alpha_0 b_0(\tau)e^{-iT} - 2\alpha_0^* A_1^{1*}(T, \tau)e^{iT}) = 0 \quad (\text{B.21})$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} b_0(T, \tau) + 2ib_0(\tau) - i(\alpha_0^* A_2^0(T, \tau)e^{iT} + \alpha_0 A_1^{0*}(T, \tau)e^{-iT}) = 0 \quad (\text{B.22})$$

On restera à un ordre raisonnable et on posera pour poursuivre (chapitre 2) :

$$A_1 = A_1^0(T, \tau) + O(\epsilon) \quad (\text{B.23})$$

$$A_2 = A_2^0(T, \tau) + O(\epsilon) \quad (\text{B.24})$$

$$b = b_0(\tau) \quad (\text{B.25})$$

Equation de Boltzmann

Nous donnerons d'abord "une" définition d'un gaz dilué en nous appuyant sur quelques données "vertigineuses" en terme de puissances de 10.

C.1 Gaz dilué, ordres de grandeur des paramètres

En reprenant la définition de [14], on considère un gaz ordinaire, suffisamment dilué pour être "presque parfait", constitué de molécules monoatomiques (appelées dorénavant particules). Les distances moyennes entre particules sont suffisamment grandes, pour que les forces qu'elles exercent l'une sur l'autre soient négligées. Ces particules sont donc vues comme libres et indépendantes.

Cependant les collisions qui redistribuent l'énergie entre elles jouent un rôle essentiel dans l'évolution du gaz vers l'équilibre. Les collisions considérées comme parfaitement élastiques sont décrites par la mécanique classique.

On donnera quelques ordres de grandeur des paramètres d'un tel gaz (hélium) dont le calcul peut se faire simplement :

Le nombre de molécules N dans une mole de gaz occupant un volume V de 22,4 litres est de $N_{avogadro} \sim 6.10^{23}$.

La distance moyenne entre molécules voisines : $d \sim 30\text{\AA}$.

La portée des forces intermoléculaires : $\rho_0 \sim 3\text{\AA}$.

La vitesse d'agitation thermique des particules en mouvement permanent : $v \sim 1000\text{m/s}$.

Le libre parcours entre 2 collisions successives : $l_m \sim 1500\text{\AA}$.

L'intervalle de temps entre 2 collisions successives : $\tau \sim 10^{-10}\text{s}$.

Donc une molécule passe un temps de $\tau \sim l_m/v$ entre 2 collisions, chacune des collisions dure $\tau_0 \sim \rho_0/v$.

La probabilité pour qu'une molécule soit en cours de collision est donc dans le rapport de ces 2 temps soit 2.10^{-3} .

Plusieurs simplifications sont tirées de ces données :

- On ne retiendra que des collisions **binaires** (cela expliquera la présence des seuls produits quadratiques dans l'équation de Boltzmann).
- On considérera les collisions comme **instantanées** (compte tenu des ordres de grandeur respectifs des 2 échelles de temps, temps de collision τ_0 et temps entre collision τ) et comme **locales** (compte tenu des ordres de grandeur respectifs de l_m et ρ_0). Les 2 molécules entrant en collision se trouveront donc au même point \mathbf{x} et au même instant t (cela expliquera l'identité des paramètres \mathbf{x} et t pour les 2 particules en collision).
- La dernière hypothèse dite du **chaos moléculaire** est moins évidente. On considère, compte tenu de ces différentes échelles d'espace et de temps, que les particules n'ont pas la mémoire des collisions passées.

On négligera ainsi les corrélations éventuelles entre leurs vitesses avant le choc :

La probabilité que 2 particules soient au même point \mathbf{x} , au même instant t avec des vitesses respectives de \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 est égale à la probabilité que la particule 1 soit au point \mathbf{x} , à l' instant t avec une vitesse $\mathbf{v}_1 \times$ la probabilité que la particule 2 soit au point \mathbf{x} , à l' instant t avec une vitesse \mathbf{v}_2 (ce qui explique les produits de probabilité décorréllés dans l'équation de Boltzmann).

C.2 Fonction de répartition $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$

Il est évident que l'on ne peut écrire autant d'équations qu'il y a de molécules.

On considérera le paramètre statistique de base $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ comme une fonction de répartition définie ainsi :

$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)d\mathbf{x}d\mathbf{v}$ est le nombre moyen de particules qui à l'instant t se trouve dans le volume $d\mathbf{x}$ autour du point \mathbf{x} et possède la vitesse \mathbf{v} dans le volume $d\mathbf{v}$.

Cette fonction vérifie :

$$\int_{\mathbf{x}} \int_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)d\mathbf{x}d\mathbf{v} = N \text{ nombre total de particules} \quad (\text{C.1})$$

Dans la littérature on utilise souvent $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)d\mathbf{x}d\mathbf{p}$ où $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ est l'impulsion. et m la masse de la particule. En égalant le nombre de particules N dans les 2 formulations on trouve en 3D.

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{m^3} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \quad (\text{C.2})$$

C.3 Equation de Boltzmann sans collision

Considérons au temps t , l'élément de volume $d\mathbf{x}d\mathbf{v}$ centré en \mathbf{x} et \mathbf{v} . Il contient donc en moyenne $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)d\mathbf{x}d\mathbf{v}$ particules.

Au temps $t + \Delta t$ ces particules se seront déplacées, l'élément de volume $d\mathbf{x}d\mathbf{v}$ sera devenu $d\mathbf{x}'d\mathbf{v}'$ centré en \mathbf{x}' et \mathbf{v}' tel que :

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{v}dt \quad (\text{C.3})$$

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \gamma dt = \mathbf{v} + \frac{\mathbf{F}_{\text{ext}}}{m} dt \quad (\text{C.4})$$

En l'absence de forces extérieures $\mathbf{v}' = \mathbf{v}$, on a donc :

$$d\mathbf{x}'_j = \frac{\partial \mathbf{x}'_j}{\partial \mathbf{x}_i} d\mathbf{x}_i + \frac{\partial \mathbf{x}'_j}{\partial \mathbf{v}_i} d\mathbf{v}_i = \delta_{ij} d\mathbf{x}_i + dt \delta_{ij} d\mathbf{v}_i \quad (\text{C.5})$$

$$d\mathbf{v}'_j = \frac{\partial \mathbf{v}'_j}{\partial \mathbf{x}_i} d\mathbf{x}_i + \frac{\partial \mathbf{v}'_j}{\partial \mathbf{v}_i} d\mathbf{v}_i = \delta_{ij} d\mathbf{v}_i \quad (\text{C.6})$$

Le produit $\mathbf{dx}'\mathbf{dv}'$ est égal à $|J| \mathbf{dx}\mathbf{dv}$ avec $|J|$ jacobien de la transformation = 1 en l'absence de forces extérieures.

La conservation du nombre de particules en l'absence de collisions entre le temps t et $t + dt$ s'écrit :

$$f(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t) \mathbf{dx}' \mathbf{dv}' = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \mathbf{dx} \mathbf{dv}$$

Soit compte tenu de l'approximation précédente :

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{dx}, \mathbf{v} + \mathbf{dv}, t + dt) - f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = 0$$

On développe au premier ordre cette expression autour du point : \mathbf{x}, \mathbf{v} .

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{dx}, \mathbf{v} + \mathbf{dv}, t + dt) - f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{dx} + \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{dv} = 0 \quad (\text{C.7})$$

On divise par dt et on obtient l'expression de l'équation de Boltzmann sans collision :

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial \mathbf{x}} = 0 \quad (\text{C.8})$$

Car, en l'absence de forces extérieures, le dernier terme de l'équation (C.7) divisé par dt est nul.

C.4 Collision de deux particules

Considérons dans un système isolé ($\mathbf{F}_{ext} = 0$), 2 particules de masse m_1 et m_2 , situées en \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 et dont les vitesses sont respectivement de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ avant la collision, et de $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2$ après la collision.

Les seules forces intérieures dans le système sont les forces d'interaction entre les particules qui entrent en collision. Elles ne dépendent que du vecteur relatif $\mathbf{r} = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$. Ces forces intermoléculaires s'écriront :

$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = -f(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \quad (\text{C.9})$$

$$\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} = -\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} \quad (\text{C.10})$$

Les coordonnées du centre de masse \mathbf{G} sont définies par :

$$(m_1 + m_2) \mathbf{x}_G = (m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2) \quad (\text{C.11})$$

En l'absence de forces extérieures, le centre de masse est animé d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse \mathbf{V}_G .

$$(m_1 + m_2)\mathbf{V}_G = (m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2) = \text{constante} \quad (\text{C.12})$$

On pourra donc utiliser le repère galiléen \mathbb{R}^* centré en G pour écrire les différentes équations de conservation :

La conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie avant le choc (considéré comme élastique) et après le choc dans le repère initial \mathbb{R} s'écrit :

$$(m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2) = (m_1\mathbf{v}'_1 + m_2\mathbf{v}'_2) \quad (\text{C.13})$$

$$\frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_2^2 = \frac{1}{2}m_1\mathbf{v}'_1^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{v}'_2^2 \quad (\text{C.14})$$

Écrivons ces équations dans le repère \mathbb{R}^* où on définira les vitesses par :

$$\mathbf{v}_1^* = \mathbf{v}_1 - \mathbf{V}_G \quad (\text{C.15})$$

$$\mathbf{v}_2^* = \mathbf{v}_2 - \mathbf{V}_G \quad (\text{C.16})$$

$$\mathbf{v}'_1^* = \mathbf{v}'_1 - \mathbf{V}_G \quad (\text{C.17})$$

$$\mathbf{v}'_2^* = \mathbf{v}'_2 - \mathbf{V}_G \quad (\text{C.18})$$

On appellera μ la masse réduite égale à :

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad (\text{C.19})$$

$$m_1\mathbf{v}_1^* = m_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{V}_G) = m_1\left(\mathbf{v}_1 - \frac{(m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2)}{m_1 + m_2}\right) = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = \mu\mathbf{u} \quad (\text{C.20})$$

$$m_2\mathbf{v}_2^* = m_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{V}_G) = -\mu\mathbf{u} \quad (\text{C.21})$$

$$m_1\mathbf{v}'_1^* = m_1(\mathbf{v}'_1 - \mathbf{V}_G) = \mu\mathbf{u}' \quad (\text{C.22})$$

$$m_2\mathbf{v}'_2^* = m_2(\mathbf{v}'_2 - \mathbf{V}_G) = -\mu\mathbf{u}' \quad (\text{C.23})$$

$$(\text{C.24})$$

Opérons le changement de variables suivant entre les variables, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2$ et les variables \mathbf{V}_G et \mathbf{u}, \mathbf{u}' à partir de l'équation (C.12) et des relations $\mathbf{u} = (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)$ et $\mathbf{u}' = (\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2)$:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{V}_G + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{u} \quad (\text{C.25})$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{V}_G - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{u} \quad (\text{C.26})$$

$$\mathbf{v}'_1 = \mathbf{V}_G + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{u}' \quad (\text{C.27})$$

$$\mathbf{v}'_2 = \mathbf{V}_G - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{u}' \quad (\text{C.28})$$

$$(\text{C.29})$$

Remplaçons $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2$ dans l'équation (C.14).

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_1(\mathbf{V}_G + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{u})^2 + \frac{1}{2}m_2(\mathbf{V}_G - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{u})^2 = \\ \frac{1}{2}m_1(\mathbf{V}_G + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{u}')^2 + \frac{1}{2}m_2(\mathbf{V}_G - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{u}')^2 \end{aligned} \quad (\text{C.30})$$

Après développement et simplifications il vient :

$$\frac{1}{2}\mu\mathbf{u}^2 = \frac{1}{2}\mu\mathbf{u}'^2 \quad (\text{C.31})$$

Soit :

$$|\mathbf{u}| = |\mathbf{u}'| \quad (\text{C.32})$$

Les relations (C.20) deviennent :

$$m_1 |\mathbf{v}_1^*| = m_2 |\mathbf{v}_2^*| = m_1 |\mathbf{v}_1'^*| = m_2 |\mathbf{v}_2'^*| = \mu |\mathbf{u}| \quad (\text{C.33})$$

$$(\text{C.34})$$

La variable relative $\mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ obéit à l'équation :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{x}_2}{\partial t^2} \quad (\text{C.35})$$

$$= \mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{r}) \left(-\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} \right) = \mu f(\mathbf{r}) \quad (\text{C.36})$$

Cette équation est semblable à l'équation qui régit le mouvement d'une particule de masse μ soumise à la force $\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{r})$.

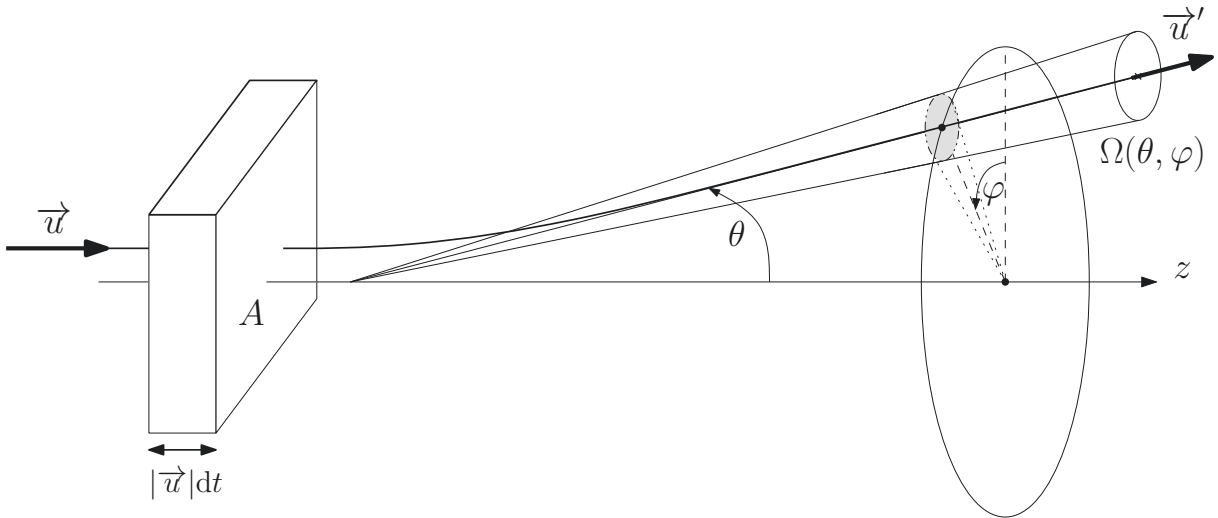


FIGURE C.1 – Diffusion dans le centre de masse

On peut donc représenter le phénomène de collision dans le centre de masse par la diffusion d'une particule fictive de masse μ , de vitesse relative \mathbf{u} . Dans la collision les modules sont

conservés $|\mathbf{u}| = |\mathbf{u}'|$, seule change la direction figure (C.1).

Cette équivalence entre collision et diffusion n'est pas gratuite, elle permet d'une part de montrer que le paramètre principal de collision est le module de la vitesse relative des 2 particules et d'autre part d'introduire un paramètre nouveau moins intuitif que l'on retrouve dans l'équation de Boltzmann : la section équivalente $\sigma(\Omega)$ et l'angle solide $\Omega(\theta, \phi)$.

On doit maintenant remplacer le modèle de collision (et son équivalent potentiel) de 2 particules bien définies par celui de la collision de $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, t)d\mathbf{x}d\mathbf{v}_1$ particules avec $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}_2, t)d\mathbf{x}d\mathbf{v}_2$ particules.

Section efficace $\sigma(\Omega)$

Soit un flux de particules Φ (nombre de particules par unité de surface et unité de temps) arrivant perpendiculairement sur N particules par unité de surface au repos. Soit nc le nombre de particules par unité de surface et unité de temps ayant " collisionné " :

La section efficace qui a la dimension d'une surface est définie par la relation :

$$nc = \sigma N \Phi \quad (\text{C.37})$$

on a bien

$$L^{-2}T^{-1} = [\sigma] \times [L^{-2}][L^{-2}T^{-1}], [\sigma] = [L^2] \quad (\text{C.38})$$

Calculons maintenant le flux de particules Φ ayant la vitesse relative \mathbf{u} . On appelle $n(\mathbf{u})$ le nombre de particules par unité de volume et par unité de temps ayant la vitesse relative \mathbf{u} . Dans le volume représenté dans la figure (C.1) on a l'égalité :

$$[\mathbf{u}dtA]n(\mathbf{u}) = \Phi Adt \quad (\text{C.39})$$

$$\text{soit : } \Phi = n(\mathbf{u})\mathbf{u} \quad (\text{C.40})$$

Le nombre de particules collisionnées, pour un élément d'angle solide $d\Omega = d\Omega(\theta, \phi)$ est d'après l'équation (C.37) :

$$nc = n(\mathbf{u})\mathbf{u}\sigma(\Omega)d\Omega \quad (\text{C.41})$$

C.5 Application aux densités de probabilité $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$

On fait le bilan entre les termes de collision sortant et les termes de collision entrant.

C.5.1 Termes de collision sortant

On considère un faisceau incident de vitesse \mathbf{v}_2 centré en \mathbf{x} sur une particule de vitesse \mathbf{v}_1 centrée aussi en \mathbf{x} (cf remarques sur la localité des collisions). Le flux incident a pour valeur $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}_2, t) d\mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 |$.

Le nombre de particules collisionnées entre t et $t + dt$ est :

$$nc = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}_2, t) d\mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 | \sigma(\Omega) d\Omega dt \quad (\text{C.42})$$

Soit les termes de collision sortant :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{collision}}^- \quad (\text{C.43})$$

On prend en compte l'ensemble des particules cibles soit : $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, t) d\mathbf{x} d\mathbf{v}_1$ et on intègre sur l'ensemble des particules incidentes, soit :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{collision}}^- d\mathbf{x} d\mathbf{v}_1 dt = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, t) d\mathbf{x} d\mathbf{v}_1 \int d\mathbf{v}_2 \int d\Omega \sigma(\Omega) dt | \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 | f(\mathbf{x}, \mathbf{v}_2, t) \quad (\text{C.44})$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{collision}}^- = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, t) \int d\mathbf{v}_2 \int d\Omega \sigma(\Omega) | \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 | f(\mathbf{x}, \mathbf{v}_2, t) \quad (\text{C.45})$$

C.5.2 Termes de collision entrant

On considère un faisceau incident de vitesse \mathbf{v}'_2 centré en \mathbf{x} sur une particule de vitesse \mathbf{v}'_1 centrée aussi en \mathbf{x} . Le flux incident a pour valeur $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}'_2, t) d\mathbf{v}'_2 | \mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2 |$

Le nombre de particules collisionnées entre t et $t + dt$ est :

$$nc' = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}'_2, t) d\mathbf{v}'_2 | \mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2 | \sigma'(\Omega) d\Omega dt \quad (\text{C.46})$$

Soit les termes de collision entrant :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{collision}}^+ \quad (\text{C.47})$$

On prend en compte l'ensemble des particules cibles soit : $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}'_1, t) d\mathbf{x} d\mathbf{v}'_1$ et on intègre sur l'ensemble des particules incidentes soit :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{collision}}^+ d\mathbf{x} d\mathbf{v}'_1 dt = \int d\mathbf{v}'_2 \int d\Omega \sigma'(\Omega) dt | \mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2 | f(\mathbf{x}, \mathbf{v}'_1, t) d\mathbf{x} d\mathbf{v}'_1 f(\mathbf{x}, \mathbf{v}'_2, t) \quad (\text{C.48})$$

$$\text{soit :} \quad (\text{C.49})$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{collision}}^+ dt = \int d\mathbf{v}'_2 \int d\Omega \sigma'(\Omega) dt | \mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2 | f(\mathbf{x}, \mathbf{v}'_1, t) d\mathbf{x} d\mathbf{v}'_1 f(\mathbf{x}, \mathbf{v}'_2, t) \quad (\text{C.50})$$

$$(\text{C.51})$$

Les sections efficaces $\sigma(\Omega)$ et $\sigma'(\Omega)$ se rapportant à des collisions inverses sont égales, de même que $| \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 | = | \mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2 |$ ainsi que $| \mathbf{v}_1 | | \mathbf{v}_2 | = | \mathbf{v}'_1 | | \mathbf{v}'_2 |$.

On obtient alors pour le terme entrant :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{collision}}^+ = \int \mathbf{d}\mathbf{v}_2 \int d\Omega \sigma(\Omega) |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| f(\mathbf{x}, \mathbf{v}'_1, t) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}'_2, t) \quad (\text{C.52})$$

L'intégrale de collision devient, après le bilan entre les termes entrants et les termes sortants :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{collision}} = \int \mathbf{d}\mathbf{v}_2 \int d\Omega \sigma(\Omega) |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| [f(\mathbf{x}, \mathbf{v}'_1, t) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}'_2, t) - f(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, t) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}_2, t)] \quad (\text{C.53})$$

Soit l'équation de Boltzmann avec collision :

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial \mathbf{x}} = \int \mathbf{d}\mathbf{v}_2 \int d\Omega \sigma(\Omega) |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| [f(\mathbf{x}, \mathbf{v}'_1, t) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}'_2, t) - f(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, t) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}_2, t)] \quad (\text{C.54})$$

Les grandeurs locales : densité, vitesse, température sont alors des moyennes calculées à l'aide de $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ [16].

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \mathbf{d}\mathbf{v} \quad (\text{C.55})$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \int_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \mathbf{v} \mathbf{d}\mathbf{v} \quad (\text{C.56})$$

$$k\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \int_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) (m/D) |\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|^2 \mathbf{d}\mathbf{v} \quad (\text{C.57})$$

$$(\text{C.58})$$

(Avec m la masse moléculaire du gaz et D le nombre de degrés de liberté de la particule.)

Stabilité et points fixes

Nous examinerons les instabilités des équations de Burgers avec et sans viscosité dans l'espace des paramètres $A(m)$, $A^*(m)$ des ondes résonantes à 1 mode et des paramètres $A(m)$, $A^*(m)$, $B(m)$ des ondes résonantes à 2 modes. Nous chercherons les points fixes (ou singuliers) qui délimitent l'espace de stabilité.

Cette étude [8] limitée à l'étude de l'équation de Burgers sans viscosité dans l'espace des paramètres $A(m)$, $A^*(m)$ des ondes résonantes à 1 seul mode, est prolongée d'une part aux équations de Burgers avec viscosité, dans l'espace des paramètres $A(m)$, $A^*(m)$ des ondes résonantes à 1 mode, et d'autre part, avec et sans viscosité, dans l'espace des paramètres $A(m)$, $A^*(m)$, $B(m)$ des ondes résonantes à 2 modes.

Un projet de document soumis en 2008 et non édité (" On nonlinear instabilities in dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics ") a été repris (Des formules issues de calculs formels MAPLE non simplifiées étant inutilisables ont été rectifiées).

Ce prolongement d'étude a été fait avec viscosité (car proche, à la compressibilité près, des équations de Boltzmann en non linéaire mais identique à celles linéarisées non compressibles) pour être utilisée dans la compréhension des équations de Boltzmann avec ondes résonantes à 1 mode ou à 2 modes.

On récrit l'équation de Boltzmann avec viscosité :

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + (\bar{u} + u') \frac{\partial u'}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} \quad (\text{D.1})$$

On pose pour le mode résonant $2\pi/3$:

$$u'(m, n) = A(m)e^{in2\pi/3} + A^*(m)e^{-i2n\pi/3} \quad (\text{D.2})$$

En appliquant le schéma leap-frog en espace avec h le pas d'espace, on obtient :

$$\dot{A}(t) + (i\frac{\sqrt{3}\bar{u}}{2h} + \frac{3\nu}{4h^2})A(t) - i\frac{\sqrt{3}}{2h}A^{*2}(t) = 0 \quad (\text{D.3})$$

On pose $A(t) = X(t) + iY(t)$:

$$A^{*2}(t) = X^2(t) - Y^2(t) - 2iX(t)Y(t) \quad (\text{D.4})$$

On obtient les 2 équations :

$$\dot{X}(t) = -\frac{3\nu}{4h^2}X(t) + \frac{\sqrt{3}\bar{u}}{2h}Y(t) + 2\frac{\sqrt{3}}{2h}X(t)Y(t) \quad (\text{D.5})$$

$$\dot{Y}(t) = -\frac{\sqrt{3}\bar{u}}{2h}X(t) - \frac{3\nu}{4h^2}Y(t) + \frac{\sqrt{3}}{2h}(X^2(t) - Y^2(t)) \quad (\text{D.6})$$

On appellera :

$$L = \frac{\sqrt{3}\bar{u}}{2h}, M = \frac{\sqrt{3}}{2h}, N = \frac{3\nu}{4h^2} \quad (\text{D.7})$$

L'équation (D.5) deviendra :

$$\dot{X}(t) = -NX(t) + LY(t) + 2MX(t)Y(t) = F(X, Y) \quad (\text{D.8})$$

$$\dot{Y}(t) = -LX(t) - NY(t) + M(X^2(t) - Y^2(t)) = G(X, Y) \quad (\text{D.9})$$

On cherche les points fixes qui vérifient :

$$F(X, Y) = -NX(t) + LY(t) + 2MX(t)Y(t) = 0 \quad (\text{D.10})$$

$$G(X, Y) = -LX(t) - NY(t) + M(X^2(t) - Y^2(t)) = 0 \quad (\text{D.11})$$

Le point $X = 0, Y = 0$ est un point fixe.

De la première équation de (D.10) on tire :

$$X(t) = \frac{LY(t)}{N - 2MY(t)} \quad (\text{D.12})$$

que l'on porte dans la seconde :

$$-L\left(\frac{LY(t)}{N - 2MY(t)}\right) - NY(t) + M\left(\left(\frac{LY(t)}{N - 2MY(t)}\right)^2 - Y^2(t)\right) = 0 \quad (\text{D.13})$$

En posant $x = N - 2MY(t)$, on obtient l'équation du troisième degré :

$$x^3 - 3Nx^2 - 3L^2x + NL^2 = 0 \quad (\text{D.14})$$

puis en posant $z = x - N$, on obtient les trois racines z_1, z_2, z_3 suivant les formules de Cardan :

$$z_1 = \sqrt[3]{L^2 + N^2}[\sqrt[3]{N + iL} + \sqrt[3]{N - iL}] \quad (\text{D.15})$$

$$z_2 = \sqrt[3]{L^2 + N^2}[j\sqrt[3]{N + iL} + j^2\sqrt[3]{N - iL}] \quad (\text{D.16})$$

$$z_3 = \sqrt[3]{L^2 + N^2}[j^2\sqrt[3]{N + iL} + j\sqrt[3]{N - iL}] \quad (\text{D.17})$$

(Avec $j^3 = 1, j = e^{2i\pi/3}, j^2 = e^{-2i\pi/3}$)

On vérifie bien que chacune de ces racines est réelle, puisque somme d'un nombre complexe et de son conjugué.

On pose :

$$N + iL = \rho e^{i\theta}, N - iL = \rho e^{-i\theta} \quad (\text{D.18})$$

$$\text{avec } \rho = \sqrt{L^2 + N^2}, \theta = \arctan(L/N) \quad (\text{D.19})$$

On peut écrire chacune des racines :

$$z_1 = 2\rho \cos(\theta/3) \quad (\text{D.20})$$

$$z_2 = 2\rho \cos((\theta + 2\pi)/3) \quad (\text{D.21})$$

$$z_3 = 2\rho \cos((\theta - 2\pi)/3) \quad (\text{D.22})$$

On obtient ainsi Y :

$$MY_1 = -\rho \cos(\theta/3) \quad (\text{D.23})$$

$$MY_2 = -\rho \cos((\theta + 2\pi)/3) \quad (\text{D.24})$$

$$MY_3 = -\rho \cos((\theta - 2\pi)/3) \quad (\text{D.25})$$

Vérifions cette solution pour l'équation sans viscosité avec $N = 0$.

On a alors : $\rho = L, \theta = \pi/2$:

$$MY_1 = -L \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{D.26})$$

$$MY_2 = L \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{D.27})$$

$$MY_3 = 0 \quad (\text{D.28})$$

Ce résultat est conforme aux résultats de [8], page 376.

On tire X_1, X_2, X_3 de (D.12) soit :

$$X_1 = -\frac{L\rho \cos(\theta/3)}{M(N + 2\rho \cos(\theta/3))} \quad (\text{D.29})$$

$$X_2 = -\frac{L\rho \cos((\theta + 2\pi)/3)}{M(N + 2\rho \cos((\theta + 2\pi)/3))} \quad (\text{D.30})$$

$$X_3 = -\frac{L\rho \cos((\theta - 2\pi)/3)}{M(N + 2\rho \cos((\theta - 2\pi)/3))} \quad (\text{D.31})$$

Et pour $\rho = L, \theta = \pi/2$:

$$X_1 = -\frac{L}{2M} \quad (\text{D.32})$$

$$X_2 = -\frac{L}{2M} \quad (\text{D.33})$$

$$X_3 = \frac{L}{M} \quad (\text{D.34})$$

Soit les quatre points fixes pour l'équation avec viscosité :

$$X_0 = 0, Y_0 = 0 \quad (\text{D.35})$$

$$X_1 = -\frac{L\rho \cos(\theta/3)}{M(N + 2\rho \cos(\theta/3))}, Y_1 = -\frac{\rho \cos(\theta/3)}{M} \quad (\text{D.36})$$

$$X_2 = -\frac{L\rho \cos((\theta + 2\pi)/3)}{M(N + 2\rho \cos((\theta + 2\pi)/3))}, Y_2 = -\frac{\rho \cos((\theta + 2\pi)/3)}{M} \quad (\text{D.37})$$

$$X_3 = -\frac{L\rho \cos((\theta - 2\pi)/3)}{M(N + 2\rho \cos((\theta - 2\pi)/3))}, Y_3 = -\frac{\rho \cos((\theta - 2\pi)/3)}{M} \quad (\text{D.38})$$

Et les quatre points fixes pour l'équation sans viscosité :

$$X_0 = 0, Y_0 = 0 \quad (\text{D.39})$$

$$X_1 = -\frac{L}{2M}, Y_1 = -L\frac{\sqrt{3}}{2M} \quad (\text{D.40})$$

$$X_2 = -\frac{L}{2M}, Y_2 = L\frac{\sqrt{3}}{2M} \quad (\text{D.41})$$

$$X_3 = \frac{L}{M}, Y_3 = 0 \quad (\text{D.42})$$

On examine la stabilité à ces points singuliers (X_i, Y_i) $i = 0, 1, 2, 3$, avec le changement de repère suivant :

$$X = X_i + \tilde{X} \quad (\text{D.43})$$

$$Y = Y_i + \tilde{Y} \quad (\text{D.44})$$

On linéarise le système (D.8) au voisinage du point singulier en développant au premier ordre :

$$\frac{\partial(X_i + \tilde{X})}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{X}}{\partial t} = F(X_i, Y_i) + \left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)_{X=X_i} \tilde{X} + \left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)_{Y=Y_i} \tilde{Y} \quad (\text{D.45})$$

$$\frac{\partial(Y_i + \tilde{Y})}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial t} = G(X_i, Y_i) + \left(\frac{\partial G}{\partial X}\right)_{X=X_i} \tilde{X} + \left(\frac{\partial G}{\partial Y}\right)_{Y=Y_i} \tilde{Y} \quad (\text{D.46})$$

On cherche des solutions de la forme :

$$\tilde{X} = \Lambda_1 e^{\lambda t} \quad (\text{D.47})$$

$$\tilde{Y} = \Lambda_2 e^{\lambda t} \quad (\text{D.48})$$

On a alors à résoudre un problème aux valeurs propres et, suivant la nature réelle ou complexe, ainsi que leur signes respectifs, on en déduit la nature du point singulier, l'équation aux valeurs propres est :

$$\lambda^2 = 4M^2(Y^2 + X^2) - L^2 \quad (\text{D.49})$$

On trouve pour $X_0 = 0, Y_0 = 0$, les 2 valeurs propres complexes : $\lambda = +iL, \lambda = -iL$.

Pour $X_1 = -\frac{L}{2M}, Y_1 = -L\frac{\sqrt{3}}{2M}$ et $X_2 = -\frac{L}{2M}, Y_2 = L\frac{\sqrt{3}}{2M}$, les 2 valeurs propres réelles de signes opposés $\lambda = +\sqrt{3}LM, \lambda = -\sqrt{3}LM$.

Pour $X_3 = \frac{L}{M}, Y_3 = 0$, les 2 valeurs propres réelles de signes opposés $\lambda = +\sqrt{3}L, \lambda = -\sqrt{3}L$.

Les trois points P, Q, R sont trois points appelés col ou selle , le point 0 est un foyer.
L'allure des trajectoires est indiquée sur la figure (D.1)

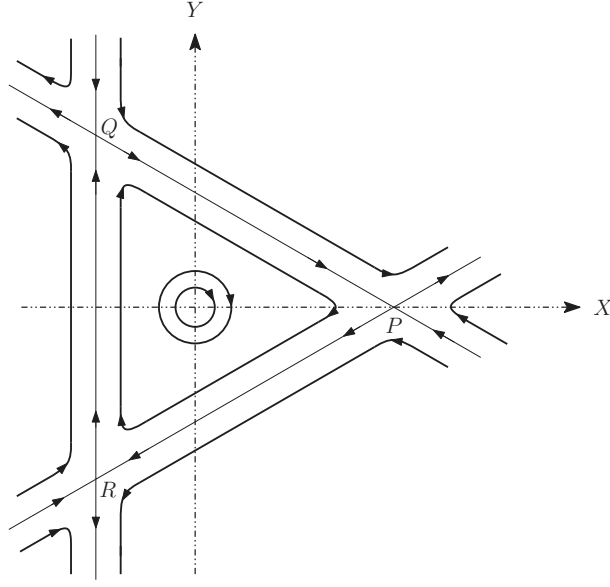


FIGURE D.1 – Stabilité du mode résonant

On pose pour les 2 modes résonants $\pi/2, \pi$.

$$u'(m, n) = A(m)e^{in\pi/2} + A^*(m)e^{-in\pi/2} + B(m)e^{in\pi} \quad (\text{D.50})$$

En appliquant le schéma leap-frog en espace avec h le pas d'espace, on obtient :

$$\dot{A}(t) + (i\frac{\bar{u}}{h} + \frac{\nu}{2h^2})A(t) + \frac{i}{3h}A^*(t)B(t) = 0 \quad (\text{D.51})$$

$$\dot{B}(t) + \frac{\nu}{h^2}B(t) + \frac{i}{3h}(A^2(t) - A^{*2}(t)) = 0 \quad (\text{D.52})$$

On pose dans les équations précédentes : $A(t) = X(t) + iY(t)$.

On obtient les 3 équations :

$$\dot{X}(t) = -\frac{\nu}{2h^2}X(t) + \frac{\bar{u}}{h}Y(t) - \frac{1}{3h}Y(t)B(t) \quad (\text{D.53})$$

$$\dot{Y}(t) = -\frac{\nu}{2h^2}X(t) - \frac{\bar{u}}{h}Y(t) - \frac{1}{3h}X(t)B(t) \quad (\text{D.54})$$

$$\dot{B}(t) = -\frac{\nu}{h^2}B(t) + \frac{4}{3h}X(t)Y(t) \quad (\text{D.55})$$

On appellera :

$$L = \frac{\bar{u}}{h}, M = -\frac{1}{3h}, N = \frac{\nu}{2h^2} \quad (\text{D.56})$$

L'équation (D.53) deviendra :

$$\dot{X}(t) = -NX(t) + LY(t) + MY(t)B(t) \quad (\text{D.57})$$

$$\dot{Y}(t) = -LX(t) - NY(t) + MX(t)B(t) \quad (\text{D.58})$$

$$\dot{B}(t) = -4X(t)Y(t)M - 2NB(t) \quad (\text{D.59})$$

On cherche les points fixes qui vérifient :

$$-NX(t) + LY(t) + MY(t)B(t) = 0 \quad (\text{D.60})$$

$$-LX(t) - NY(t) + MX(t)B(t) = 0 \quad (\text{D.61})$$

$$-4X(t)Y(t)M - 2NB(t) = 0 \quad (\text{D.62})$$

Le point $X = 0, Y = 0, B = 0$ est un point fixe.

De la dernière équation on tire :

$$B(t) = -2 \frac{X(t)Y(t)M}{N} \quad (\text{D.63})$$

que l'on porte dans les deux premières :

$$-NX(t) + LY(t) - 2M^2Y(t) \frac{X(t)Y(t)}{N} = 0 \quad (\text{D.64})$$

$$-LX(t) - NY(t) - 2M^2X(t) \frac{X(t)Y(t)}{N} = 0 \quad (\text{D.65})$$

Comme précédemment, dans ce dernier système on tire X d'une équation et on reporte dans l'autre pour aboutir à l'équation :

$$-\left(\frac{L^2}{N + 2Y^2(t) \frac{M^2}{N}} \right) - N - 2 \frac{M^2}{N} \left(\frac{L^2 Y^2(t)}{N + 2Y^2(t) \frac{M^2}{N}} \right) = 0 \quad (\text{D.66})$$

En posant $x = N + 2Y^2(t) \frac{M^2}{N}$, on obtient l'équation du second degré suivante :

$$Nx^2 + 2L^2x - L^2N = 0 \quad (\text{D.67})$$

dont les racines sont :

$$x_1 = \frac{-L^2 + \sqrt{L^4 + N^2}}{N} \quad (\text{D.68})$$

$$x_2 = \frac{-L^2 - \sqrt{L^4 + N^2}}{N} \quad (\text{D.69})$$

On obtient, alors pour Y :

$$2Y_1^2 M^2 = -(L^2 + N^2) + \sqrt{L^4 + N^2} < 0 \quad (\text{D.70})$$

$$2Y_2^2 M^2 = -(L^2 + N^2) - \sqrt{L^4 + N^2} < 0 \quad (\text{D.71})$$

On n' a pas de points fixes autre que $X = 0, Y = 0, B = 0$ compte tenu que les solutions précédentes Y_1, Y_2 ne sont pas réelles :

Bibliographie

- [1] RICOT (D.), *Simulation numérique d'un écoulement affleurant une cavité par la méthode Boltzmann sur réseau et application au toit ouvrant de véhicules automobiles*. Thèse de doctorat, Ecole centrale de lyon, 2002.
- [2] MARIE (S.), *Etude de la méthode Boltzmann sur réseau pour les simulations en aéroacoustique*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2008.
- [3] APPEL (W.) et OTHERS, *LaTeX pour l'impatient*. H,K, 2009.
- [4] MARIE (S.), RICOT (D.) et SAGAUT (P.), « Comparison between lattice boltzmann method and navier stokes high order schemes for computational aeroacoustics », *Journal of computational Physics*, vol. 228, 2009, p. 1056–1070.
- [5] BHATNAGAR (P.), GROSS (E.) et KROOK (M.), « A model for collision processes in gases. small amplitude processes in charged and neutral one-component systems », *Physical Review*, vol. 94, n° 3, 1954, p. 511–525.
- [6] D'HUMIÈRE (D.), GINZBURG (I.), KRAFCZYK (Y.) *et al.*, « Multiple relaxation time lattice boltzmann models in three dimensions », *Phil. Trans. R. Soc. Lon.*, vol. A360, 2002, p. 437–451.
- [7] BRIGGS (W.), NEWELL (A.) et SARIE (T.), « Focusing :a mechanism for instability of nonlinear finite difference equations », *Journal of computational physics*, vol. 51, 1983, p. 83–106.
- [8] SLOAN (D.) et MITCHELL (A.), « On nonlinear instabilities in leap-frog finite difference schemes », *Journal of computational physics*, vol. 67, 1986, p. 372–395.
- [9] SLOAN (D.), « On modulational instabilities in discretisations of the korteweg-de vries equation », *Journal of computational physics*, vol. 79, 1988, p. 167–183.
- [10] CLOOT (A.) et HERBST (B.), « Frid resonances,focusing and benjamin-feir instabilities in leapfrog time discretisations », *Journal of computational physics*, vol. 75, 1988, p. 31–53.
- [11] FORNBERG (B.), « On the stability of leap-frog and crank-nicholson approximations of a nonlinear partial differential equation », *Math. Comput.*, vol. 21,45, 1973.
- [12] NEWELL (A.), « Finite amplitude instabilities of partial differential equation », *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 33(1), 1977, p. 133–160.
- [13] SUCCI (S.), *The lattice Boltzmann equation for fluid dynamics and beyond*. Oxford University Press, 2001.
- [14] DIU (B.), GUTHMANN (C.), LEDERER (D.) et ROULER (B.), *Physique statistique*. Hermann,éditeurs des sciences et des arts, 2001.
- [15] NGO (C.) et NGO (H.), *Physique statistique introduction*. Dunod, 2008.
- [16] POTTIER (N.), *Physique statistique hors d'équilibre*. CNRS Editions,EDP sciences, 2007.
- [17] CHOMAZ (J.), « Global instabilities in spatially developing flows nonnormality and nonlinearity », *Annual Review of fluid mechanics*, vol. 37, 2005, p. 357–392.
- [18] ROBINET (J.). « Instabilités compressibles- cours : C2-c4 : Fondements théoriques ecole des arts et métiers », 2009.

- [19] CORBETT (P.) et BOTTARO (A.), « Optimal linear growth in three dimensionnal boundary layers », *Journal of fluid mechanics*, vol. 435, 2001, p. 1,23.
- [20] HANIFI (A.), SCHMID (P.) et HENNINGSON (D.), « Transient growth in compressible boundary layer flow », *Physics of fluids*, 1996, p. 826–837.
- [21] DELLAR (P.), « Bulk and shear viscosities in lattice boltzmann equations », *Physical Review E*, vol. 64, 031203, 2001.
- [22] SCHMID (P.) et HENNINGSON (D.), *Stability and transition in shear flows*. Springer, 2001.
- [23] VERGNAULT (E.), MALASPINAS (O.) et SAGAUT (P.), « A lattice boltzmann method for non linear disturbances around an arbitrary flow », *Preprint to Journal of computational physics*, 2012, p. 1–20.
- [24] CHU (B.), « On the energy transfer to small disturbances in fluid flow », *Acta mechanica*, vol. 1, 1965, p. 215–234.
- [25] GEORGE (K.) et SUJITH (R.), « On chu’s disturbance energy », *Journal of sound and vibration*, vol. 330, 2011, p. 5280–5291.
- [26] PHILLIPS (N.), *The atmosphere and the sea in motion*. Rockefeller institute, New York, 1959.
- [27] LE QUÉRÉ (P.) et PODVIN (B.). « Méthodes numériques pour les écoulements incompressibles », 2013.
- [28] WEN-CHYUAN (Y.), « Eigenvalues of several tridiagonal matrices », *Applied mathematics E-notes*, vol. 5, 2005, p. 66,74.
- [29] BOLTZMANN (L.), « Weiter studien uber das warmegleichgewicht unter gas-molekullen », *Wien. Ber.*, vol. 66, 1878, p. 275–370.
- [30] CHIKATAMARLA (S.) et KARLIN (I.), « Lattices for the lattice boltzmann method », *Physical review E*, vol. 79, 2009, p. 1–12.
- [31] XIAOWEN (S.), XUE-FENG (Y.) et HUDONG (C.), « Kinetic theory representation of hydrodynamics,a way beyond the navier-stokes equation », *Journal of fluid mechanics*, vol. 550, 2006, p. 413–441.
- [32] RICOT (D.), MAILLARD (V.) et BAILLY (C.), « Numerical simulation of unsteady cavity flow using lattice boltzmann method », *AIAA-paper*, 2002, p. 2002–2532.
- [33] MARIÉ (S.), RICOT (D.) et SAGAUT (P.), « Accuracy of lattice boltzmann method for aeroacoustics simulations », *AIAA-paper*, 2007, p. 2007–3515.
- [34] RICOT (D.), MARIÉ (S.), SAGAUT (P.) et BAILLY (C.), « Lattice boltzmann method with selective viscosity filter », *Journal of computational Physics*, vol. 228, 2009, p. 4478–4490.
- [35] CHAPMAN (S.) et COWLING (T.), *The mathematical theory of non-uniform gases*. Cambridge university press., 1970.
- [36] BROADWELL (J.), « Study of rarified shear flow by the discrete velocity method », *Journal of fluid mechanics*, vol. 19, 1964, p. 401–414.
- [37] GATIGNOL (R.), *Théorie cinétique des gaz à répartition discrète des vitesses*, vol. 36. Springer, Berlin., 1975.
- [38] VON NEUMANN (J.) et RICHTMYER (R.), « A method for the numerical calculation of hydrodynamics shocks », *Journal of applied Physics*, vol. 21, 1950, p. 232–237.
- [39] LALLEMAND (P.) et LUO (L.), « Theory of the lattice boltzmann method : Dispersion, dissipation, isotropy, galilean invariance and stability. », *Physical Review E*, vol. 61(06), 2000.
- [40] CHARRU (F.), *Instabilités hydrodynamiques*. CNRS Editions,EDP sciences, 2007.

- [41] HUERRE (P.). « Instabilities and control of shear flows », 2011.
- [42] VERGNAULT (E.) et SAGAUT (P.), « Adjoint lattice boltzmann method for optimisation problems », *Preprint to Journal of computational physics*, 2013, p. 1–12.
- [43] TÉKITEK (M.), BOUZIDI (M.), DUBOIS (F.) et LALLEMAND (P.), « Adjoint lattice boltzmann equation for parameter identification », *Computers and fluids*, vol. 35, 2006, p. 805–813.
- [44] MESINGER (F.) et ARAKAWA (A.), « Numerical methods used in atmospheric models », *GARP publications series No 17*, vol. 1, 1976, p. 1–65.

Table des figures

1	Simulation par la méthode de Boltzmann sur réseau de la couche limite autour d'un TGV à 300 km/h au niveau inter remorques - source Alstom -	1
2	Comparaison entre le bruit de roulement et le bruit aérodynamique en fonction de la vitesse. (LeqA en dBA en fonction de la vitesse U_0 en km/h) - source SNCF -	2
3	Simulation par la méthode de Boltzmann sur réseau du bruit aéroacoustique autour de la cabine de conduite. (Densité spectrale de puissance de la pression dans la bande [50-500hz]) - source Alstom -	3
4	Protection vis à vis des vents traversiers sur le viaduc des Angles au franchissement du Rhône - source SNCF -	3
5	Station anémométrique sur la ligne TGV Méditerranée mesurant la vitesse et la direction du vent - source SNCF -	4
6	Onde de compression à l'entrée de la tête du train dans un tunnel - source SNCF -	4
7	Onde de détente à l'entrée de la queue du train dans un tunnel - source SNCF -	4
8	Simulation par la méthode de Boltzmann sur réseau des vitesses d'air dans les 2 salles de 2 ^e classe du TGV Duplex (" le plus beau train du monde ! ") en situation de chauffage - source Alstom -	5
9	Simulation par la méthode de Boltzmann sur réseau de la section de couche limite au niveau du pantographe - source Alstom -	5
10	Maillage (réseau) autour d'un TGV pour un calcul de Boltzmann sur réseau - source Alstom -	7
11	Simulation par la LBM de l'écoulement en tête d'une motrice avant TGV - source Alstom -	7
12	Simulation de l'écoulement sous la motrice avant d'un TGV. (Calcul de la densité spectrale de puissance par la LBM de la pression dans la bande [50-500hz]) - source Alstom -	8
1.1	Influence de Re	14
2.1	Carte de stabilité pour 1 mode, $\bar{u} = [0, 1], \sigma = [0, 0.25]$, Nombre de pas de temps=2000, Nombre de pas d'espace=120.	28
2.2	Carte de stabilité pour 2 modes, $\bar{u} = [0, 1], \sigma = [0, 1]$, Nombre de pas de temps=2000, Nombre de pas d'espace=120.	31
2.3	Solution du mode 1, $\bar{u} = 0.75, \sigma = 0.1, J = 120, \delta = 3, \mu = 0.000005, t = 200, 2000, 3140$	36
2.4	Transformée de Fourier de u , $\bar{u} = 0.75, \sigma = 0.1, J = 120, \delta = 3, \mu = 0.000005, t = 200, 2000, 3140$	37
2.5	Carte de stabilité avec sideband pour 1 mode, $\bar{u} = [0, 1], \sigma = [0, 0.25], J = 120, \delta = 3, \mu = 0.000005, t = 2000$	38
2.6	Solution du mode 2, $\bar{u} = 0.625, \sigma = 0.23, J = 300, \delta = 3, \mu = 0.000005, t = 100, 1800, 2223$	39
2.7	Transformée de Fourier de u , $\bar{u} = 0.625, \sigma = 0.23, J = 300, \delta = 3, \mu = 0.000005, t = 100, 1800, 2223$	40
2.8	Solution du mode 2, $\bar{u} = 0.9, \sigma = 0.11, J = 300, \delta = 3, \mu = 0.000005, t = 100, 1500, 2043$	41

2.9	Transformée de Fourier de u , $\bar{u} = 0.9, \sigma = 0.11, J = 300, \delta = 3, \mu = 0.000005, t = 100, 1500, 2043$	42
2.10	Solution du mode 2, $u(t)$, $\bar{u} = 0.9, \sigma = 0.11, J = 122, \delta = 3, \mu = 0.000005$	43
2.11	Carte de stabilité avec sideband pour 2 modes, $\bar{u} = [0, 1], \sigma = [0, 1], \mu = 0.000005, J = 300, \delta = 3, \mu = 0.000005, t = 2000$	43
2.12	Partie réelle de $A_1^0(t)$ (bleu), $A_2^0(t)$ (vert) et de $b(t)$ (noir) en fonction de t , $\bar{u} = 0.4, \sigma = 0.1, J = 120, \delta = 3, \mu = 0.000005$	50
2.13	Partie réelle de $A_2^0(t)$ et de $b_0(t)$ en fonction du temps, $\bar{u} = 0.9, \sigma = 0.2, J = 120, \delta = 3, \mu = 0.000005$	51
2.14	Partie réelle de $A_2^0(t)$ et de $b_0(t)$, $\bar{u} = 0.9, \sigma = 0.4775, J = 120, \delta = 3, \mu = 0.000005$	51
2.15	Zone de stabilité fonction de R et β	57
2.16	Influence de la viscosité pour 1 mode, $\bar{u} = [0, 1], \sigma = [0, 0.25], \tau = 0.001, J = 12, t = 500$	58
2.17	Influence de la viscosité pour 2 modes, $\bar{u} = [0, 1], \sigma = [0, 1], \tau = 0.001, J = 12, t = 500$	58
3.1	Schéma de vitesse D1Q3	68
4.1	Calcul des valeurs propres du polynôme du troisième ordre (4.30) en fonction de \bar{u} et de k , $0 < \bar{u} < 1$ et $0 < k < 2\pi$	76
4.2	Carte de stabilité pour 1 mode avec initialisation (a1=AAA) sur $h_l(0, n)$, $\bar{u} = [0, 0.5], \sigma = [0, 0.1], \omega = 1.85, J = 3, t = 2000\Delta t$	81
4.3	Carte de stabilité pour 1 mode avec initialisation (a2=0A-A) sur $h_l(0, n)$, $\bar{u} = [0, 0.5], \sigma = [0, 0.15], \omega = 1.85, J = 3, t = 2000\Delta t$	82
4.4	Carte de stabilité pour 1 mode avec initialisation (a3=AA-A) sur $h_l(0, n)$, $\bar{u} = [0, 0.45], \sigma = [0, 0.12], \omega = 1.85, J = 3, t = 2000\Delta t$	83
4.5	Carte de stabilité pour 1 mode avec initialisation sur $u'(0, n)$ de $h_l(0, n)$, $\bar{u} = [0, 0.2], \sigma = [0, 0.1], \omega = 1.85, J = 120, t = 2000\Delta t$	85
4.6	Carte de stabilité pour 1 mode avec initialisation à partir des fonctions d'équilibre de $h_l(0, n)$, $\bar{u} = [0, 0.5], \sigma = [0, 0.2], \omega = 1.85, J = 120, t = 2000\Delta t$	86
4.7	Carte de stabilité pour 1 mode avec initialisation sur $u'(0, n)$ de $h_l(0, n)$, $\bar{u} = [0, 0.2], \sigma = [0, 0.1], \omega = 1.9$ et $1.99, J = 120, t = 2000\Delta t$	87
4.8	Carte de stabilité pour 2 modes avec initialisation (b_1 =AAABBB) sur $h_l(0, n)$, $\bar{u} = [0, 0.5], \sigma = [0, 0.2], \omega = 1.85, J = 300, t = 2000\Delta t$	91
4.9	Carte de stabilité pour 2 modes avec initialisation (b_2 =0A-A0B-B) sur $h_l(0, n)$, $\bar{u} = [0, 0.5], \sigma = [0, 0.2], \omega = 1.85, J = 300, t = 2000\Delta t$	92
4.10	Carte de stabilité pour 2 modes avec initialisation (b_3 =AA-ABB-B) sur $h_l(0, n)$, $\bar{u} = [0, 0.5], \sigma = [0, 0.2], \omega = 1.85, J = 120, t = 2000\Delta t$	92
4.11	Carte de stabilité pour 2 modes avec initialisation sur $u'(0, n)$ de $h_l(0, n)$, $\bar{u} = [0, 0.2], \sigma = [0, 0.2], \omega = 1.85, J = 120, t = 2000\Delta t$	94
4.12	Détail de la carte de stabilité pour 2 modes avec initialisation sur $u'(0, n)$ de $h_l(0, n)$, $\bar{u} \approx 0.15 - 0.16, \sigma \approx 0.05 - 0.06, \omega = 1.85, J = 120, t = 2000\Delta t$	95
4.13	Carte de stabilité pour 2 modes avec initialisation sur la fonction d'équilibre de $h_l(0, n)$, $\bar{u} = [0, 0.5], \sigma = [0, 0.2], \omega = 1.85, J = 300, t = 2000\Delta t$	96
4.14	Variations de $u'(t, n)$, fonction de n , $\bar{u} = [0, 0.1], \sigma = [0, 0.03], \omega = 1.85, J = [1, 120], t = 50\Delta t, \delta = 3, \mu = 0.000005$	98
4.15	Variations de $u'(t, n)$, fonction de n , $\bar{u} = [0, 0.1], \sigma = [0, 0.03], \omega = 1.85, J = [1, 120], t = 100\Delta t, \delta = 3, \mu = 0.000005$	98
4.16	Variations de $u'(t, n)$, fonction de n , $\bar{u} = [0, 0.1], \sigma = [0, 0.03], \omega = 1.85, J = [1, 120], t = 105\Delta t, \delta = 3, \mu = 0.000005$	99

4.17	Variations de $u'(t, n)$, fonction de n , $\bar{u} = [0, 0.1]$, $\sigma = [0, 0.03]$, $\omega = 1.85$, $J = [1, 120]$, $t = 106\Delta t$, $\delta = 3$, $\mu = 0.000005$	99
4.18	FFT de $u'(t, n)$, $\bar{u} = [0, 0.1]$, $\sigma = [0, 0.03]$, $\omega = 1.85$, $J = [1, 120]$, $t = 106\Delta t$, $\delta = 3$, $\mu = 0.000005$	100
4.19	Carte de stabilité pour 2 modes avec initialisation sur $u'(0, n)$ de $h_l(0, n)$, <i>etsidebandsur A2et B1</i> $\bar{u} = [0, 0.2]$, $\sigma = [0, 0.2]$, $\omega = 1.85$, $J = 120$, $t = 2000\Delta t$, $\delta = 3$, $\mu = 0.000005$	101
5.1	Evolution de $G(t)$ pour $\epsilon = 0.1, 0.04, 0.02$	107
5.2	Evolution de $G(t)$ optimal pour $\epsilon = 0.1, 0.04, 0.02$	108
5.3	Evolution de $E(t)$ en fonction de t et \bar{u} , $\bar{u} = [0, 0.4]$, $t = [0, 100]$	118
5.4	Evolution de $E(t)$ en fonction de t et \bar{u} , $\bar{u} = [0, 0.4]$, $t = [0, 100]$	118
5.5	Schéma d'optimisation de la croissance pour les équations de Boltzmann non linéaires	128
5.6	Evolution de $G(T) = E(T)$ en fonction du nombre de pas (npas) d'optimisation et de \bar{u} , $\bar{u} = [0, 0.25]$, $npas = [0, 50]$	132
5.7	Evolution de $G(T) = E(T)$, profil, en fonction du nombre de pas (npas) d'optimisation, $\bar{u} = [0, 0.25]$, $npas = [0, 50]$	133
5.8	Evolution de $G_{max}(0, T) = E(T)$ en fonction du nombre de pas (npas) d'optimisation et de \bar{u} , $\bar{u} = [0, 0.25]$, $npas = [0, 50]$	133
5.9	Evolution de $G_{max}(0, T) = E(T)$, profil, en fonction du nombre de pas (npas) d'optimisation, $\bar{u} = [0, 0.25]$, $npas = [0, 50]$	134
6.1	Schéma D2Q9	139
6.2	Parité de $n, p, n + p$ dans les différentes cellules, avec I=impair et P=pair	147
6.3	Transport entre m et $m + 1$ des différentes fonctions $h_l(n, p)$	147
6.4	Carte de stabilité avec les hl initiaux tous égaux, $\bar{u} = [0, 0.125]$, $\bar{v} = 0$, $\sigma = [0, 1]$, $Jx = 16$, $Jy = 16$, $\omega = 1.85$, $t = 500\Delta t$	149
6.5	Carte de stabilité avec les hl initiaux tous égaux, $\bar{u} = 0$, $\bar{v} = [0, 0.125]$, $\sigma = [0, 1]$, $Jx = 16$, $Jy = 16$, $\omega = 1.85$, $t = 500\Delta t$	149
6.6	Carte de stabilité avec les hl initiaux tous égaux sauf h3=-hl, $\bar{u} = 0$, $\bar{v} = [0, 0.125]$, $\sigma = [0, 1]$, $Jx = 16$, $Jy = 16$, $\omega = 1.85$, $t = 500\Delta t$	150
C.1	Diffusion dans le centre de masse	167
D.1	Stabilité du mode résonant	175

Liste des tableaux

2.1	Tableau des différents produits croisés introduits par les non linéarités quadratiques	44
4.1	Transport entre les composantes $h_l(m, n)$ et $h_l(m + 1, n + c_l)$ pour $n = 1, 3$	79
4.2	Tableau des transports entre les composantes de $h_l(m, n)$ et $h_l(m + 1, n + c_l)$ pour $n=1,4$	90
5.1	Amplification du vecteur f , résultante des vecteurs propres Φ_1 et Φ_2 non orthogonaux.	106
6.1	Tableau des principaux paramètres	139
6.2	Produit des facteurs $X_i \times X_j$	144